

OPTIMISATION LINÉAIRE

PROBLÈME

1. Comme x est un nombre de desserts, alors : $x \geq 0$.

Comme y est un nombre de desserts, alors : $y \geq 0$.

Les x desserts **A** nécessitent $10x$ euros de matière première. Les y desserts **B** nécessitent $20x$ euros de matière première.

Comme le traiteur dispose d'un budget pour les matières premières limité à 700 euros :

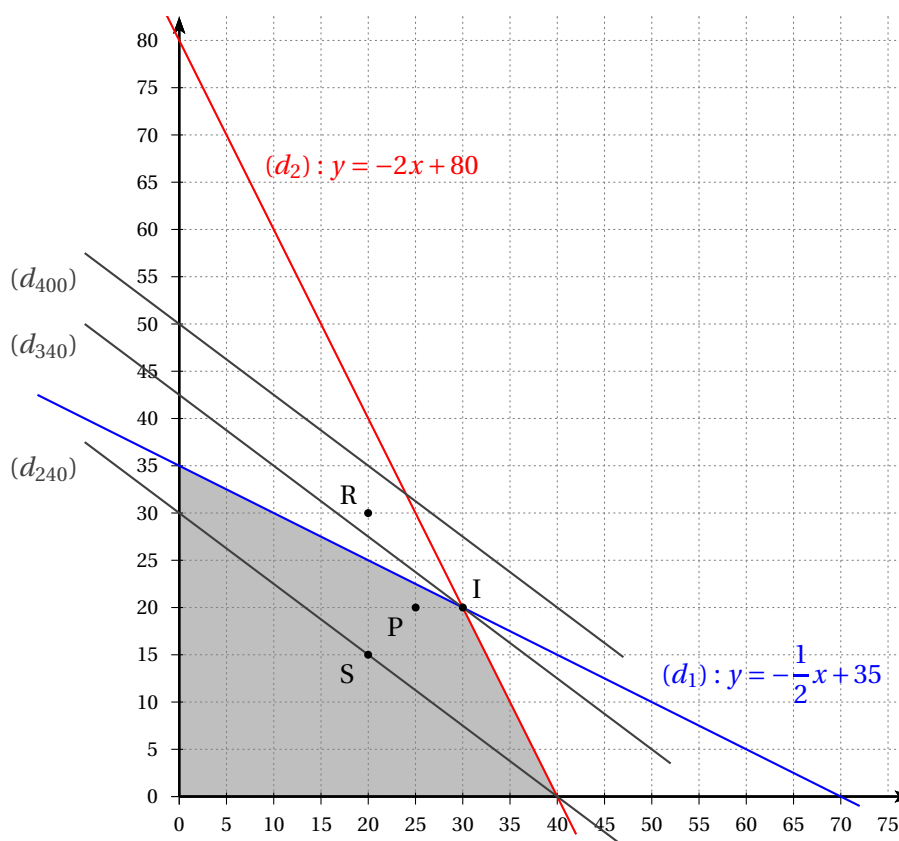
$$10x + 20y \leq 700 \Leftrightarrow 20y \leq -10x + 700 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 35$$

Les x desserts **A** nécessitent $3x$ heures de fabrication. Les y desserts **B** nécessitent $1,5x$ heures de fabrication.

Comme le traiteur dispose d'au plus 120 heures de travail :

$$3x + 1,5y \leq 120 \Leftrightarrow 1,5y \leq -3x + 120 \Leftrightarrow y \leq -2x + 80$$

2. a. Graphique :



- b. Comme le point I est à l'intersection des droites (d_1) et (d_2) , alors ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 35 \\ y = -2x + 80 \end{cases}$$

Par équivalences successives :

$$-\frac{1}{2}x + 35 = -2x + 80 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 2x = 80 - 35 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 45 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \times 45 = 30$$

En remplaçant x par 30 dans la deuxième équation, par exemple :

$$y = -2 \times 30 + 80 = 20$$

Les coordonnées du point I sont données par (30 ; 20).

3. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient le système (S) est le domaine grisé délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, et les droites (d_1) et (d_2) .

4. a. Comme le point P de coordonnées (25 ; 20) appartient au domaine grisé, alors le traiteur peut proposer à ses clients 25 desserts **A** et 20 desserts **B**.

On peut observer que le couple (25 ; 20) vérifie les contraintes de budget et de temps :

$$10 \times 25 + 20 \times 20 = 650 \leq 700$$

$$3 \times 25 + 1,5 \times 20 = 105 \leq 120$$

- b. Comme le point R de coordonnées (20 ; 30) n'appartient pas au domaine grisé, alors le traiteur ne peut pas proposer à ses clients 20 desserts **A** et 30 desserts **B**.

On peut observer que le couple (20 ; 30) ne vérifie pas la contrainte de budget :

$$10 \times 20 + 20 \times 30 = 800 > 700$$

5. a. Le bénéfice réalisé par le traiteur en réalisant x desserts **A** est égal à $6x$ et le bénéfice réalisé par le traiteur en réalisant y desserts **B** est égal à $8y$.

Le bénéfice total b vérifie bien :

$$b = 6x + 8y$$

- b. On a : $6x + 8y = 240 \Leftrightarrow 8y = -6x + 240 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 30$.

L'équation réduite de la droite (d_{240}) est : $y = -\frac{3}{4}x + 30$.

Le point S du domaine grisé de coordonnées (20 ; 30) appartient à la droite (d_{240}) donc un bénéfice de 240 euros est réalisable par le traiteur.

- c. On a : $6x + 8y = 400 \Leftrightarrow 8y = -6x + 400 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 50$.

L'équation réduite de la droite (d_{400}) est : $y = -\frac{3}{4}x + 50$.

Aucun point du domaine grisé n'appartient à la droite (d_{400}) donc un bénéfice de 400 euros n'est pas réalisable par le traiteur.

- d. Parmi toutes les droites (d_b) d'équation réduite $y = -\frac{3}{4}x + \frac{b}{8}$, celle qui possède la plus grande ordonnée à l'origine et qui passe par un point du domaine grisé à coordonnées entières est la droite (d_{340}) .

Le point en question est le point I donc, le bénéfice maximal est égal à 340 euros, réalisé avec 30 desserts **A** et 20 desserts **B**.