VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI BINOMIALE

(SUJET DE SECOURS)

EXERCICE 1

Une chaîne de magasins d'alimentation décide d'organiser un jeu à l'intention de ses clients.

Le jeu consiste à faire tourner trois roues sur un écran. Chaque roue contient huit symboles différents dont un seul est le logo du magasin. Chaque symbole a la même probabilité de sortie.

Ainsi la probabilité qu'une roue choisie s'arrête sur le logo du magasin est $p = \frac{1}{8}$.

Les symboles affichés par les roues sont indépendants les uns des autres.

On pose X le nombre de logos du magasin obtenu après avoir fait tourner les trois roues.

1. Représenter le jeu à l'aide d'un arbre pondéré.

   On notera S l'événement : « Le logo du magasin sort lors d'un tour de roue ».
2. Démontrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Indiquer ses paramètres.
3. Calculer $p(X = 0)$. Interpréter ce résultat.
4. Un client gagnera 10 € s'il obtient deux logos du magasin et 100 € s'il en obtient trois. Dans les autres cas, il ne gagnera rien.
   - **a.** Calculer la probabilité qu'il gagne 10 €.
   - **b.** Calculer la probabilité qu'il gagne 100 €.
   - **c.** Un client affirme que la probabilité de ne rien gagner est supérieure à 0,95.
     Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.
5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat.

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique des composants électroniques. L'entreprise estime que 4 % des composants fabriqués présentent un défaut et sont donc inutilisables.

Afin de contrôler la qualité des composants produits, un test est effectué : 50 composants sont prélevés au hasard dans la production et testés.

La production étant très grande, ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de composants de cet échantillon présentant un défaut.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Indiquer ses paramètres.
2. Réaliser le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 8$.
3. On admet que $\binom{50}{3} = 19\,600$.

   Prouver que $p(X = 3) \simeq 0{,}184$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins un des composants testés soit défectueux.
5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.