VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI BINOMIALE

EXERCICE 1

1. Un ticket permet de gagner 150 € ou 75 € ou 25 € mais coûte 2 €, donc le gain du joueur G prend ses valeurs dans $\{ 148 ; 73 ; 23 ; -2 \}$.
2. D'après l'énoncé, il y a 71 tickets gagnants donc 1 929 tickets ne rapportent rien.

   On a : $p(G = 148) = \dfrac{1}{2\,000}$.

   On a : $p(G = 73) = \dfrac{10}{2\,000}$.

   On a : $p(G = 23) = \dfrac{60}{2\,000}$.

   On a : $p(G = -2000) = \dfrac{1\,929}{2\,000}$.

Valeur x_i	148	73	23	-2
Probabilité $p(G = x_i)$	$\dfrac{1}{2\,000}$	$\dfrac{10}{2\,000}$	$\dfrac{60}{2\,000}$	$\dfrac{1\,929}{2\,000}$

3. On a : $E(G) = \dfrac{1}{2\,000} \times 148 + \dfrac{10}{2\,000} \times 73 + \dfrac{60}{2\,000} \times 23 + \dfrac{1\,929}{2\,000} \times (-2)$.

   Soit : $E(G) = \dfrac{1 \times 148 + 10 \times 73 + 60 \times 23 + 1\,929 \times (-2)}{2\,000} = -\dfrac{1\,600}{2\,000} = -0{,}80$.

4. **a.** Soit m le prix de vente du billet de telle sorte que le jeu devienne équitable, c'est à dire de telle sorte que $E(G) = 0$.

$$\begin{aligned} E(G) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{1 \times (150 - m) + 10 \times (75 - m) + 60 \times (25 - m) + 1\,929 \times (-m)}{2\,000} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 150 - m + 750 - 10m + 1\,500 - 60m - 1\,929m = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 2\,400 - 2\,000m = 0 \;\Leftrightarrow\; m = \frac{2\,400}{2\,000} = 1{,}20 \end{aligned}$$

   En fixant le prix de vente du billet à 1,20 €, l'espérance devient nulle et le jeu devient équitable.

   b. Soit x le nombre de tickets permettant de gagner 25 € et de telle sorte que le jeu devienne équitable.

$$\begin{aligned} E(G) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{1 \times 148 + 10 \times 73 + x \times 23 + (1\,989 - x) \times (-2)}{2\,000} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{878 + 23x - 3\,978 + 2x}{2\,000} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 25x - 3\,100 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3\,100}{25} = 124 \end{aligned}$$

   Pour que le jeu soit équitable, le nombre de tickets permettant de gagner 25 € doit être égal à 124.

Exercice 2

1. L'élève répète $n = 6$ fois et de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli qui consiste à séparer le blanc du jaune lorsqu'elle casse un œuf, où le succès est S : « Elle réussit à séparer le blanc du jaune », de probabilité $p = \frac{5}{6}$.

   Le nombre de séparations réussies X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \dfrac{5}{6}$.

2. Triangle de Pascal jusqu'à $n = 6$:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

3. On a : $p(X = 4) = \dbinom{6}{4} \times p^4 \times (1 - p)^2 = 15 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \simeq 0{,}20$.

   La probabilité que l'élève réussisse à séparer les blancs des jaunes de 4 œufs est environ égale à 20 %.

4. On a : $E(X) = n \times p = 6 \times \dfrac{5}{6} = 5$.

   En moyenne, l'élève réussit à séparer les blancs des jaunes de 5 œufs.

5. On a : $p(X = 6) = \dbinom{6}{6} \times p^6 \times (1 - p)^0 = 1 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^6 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^0 \simeq 0{,}335$.

   La probabilité que l'élève réussisse à séparer les blancs des jaunes de 6 œufs est environ égale à 33,5 %.

   Comme $33{,}5 > \dfrac{1}{3}$, alors l'élève n'utilisera qu'un récipient.