FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

~ 6 points **EXERCICE 1**

Le capital acquis au bout de x années est donné par l'expression $C(x) = 10\,000 \times 1{,}02^x$.

1. Le 1er janvier 2025, $x = 5$ et : $C(5) = 10\,000 \times 1{,}02^5 \simeq 11\,040{,}81$.

   Le capital acquis le 1er janvier 2025 est environ égal à 11 040,81 €.

2. Le 1er avril 2030, $x = 10 + \dfrac{3}{12} = 10{,}25$ et : $C(10{,}25) = 10\,000 \times 1{,}02^{10{,}25} \simeq 12\,250{,}44$.

   Le capital acquis le 1er avril 2030 est environ égal à 12 250,44 €.

3. On résout l'équation $10\,000 \times 1{,}02^x = 15\,000$.

$$10\,000 \times 1{,}02^x = 15\,000 \Leftrightarrow 1{,}02^x = 1{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{\log(1{,}5)}{\log(1{,}02)}$$

   On a : $\dfrac{\log(1{,}5)}{\log(1{,}02)} \simeq 20{,}475$ et $20 + \dfrac{475}{1\,000} = 20 + \dfrac{171}{360} = 20 + \dfrac{5}{12} + \dfrac{21}{360}$.

   Le capital acquis est égal à 15 000 € le 22 juin 2040.

~ 10 points **EXERCICE 2**

1. **a.** Puisque $10 > 0$ et $1{,}8 \geqslant 1$, alors la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,7]$.

   b. On a : $f(1) = 10 \times 1{,}8^1 = 18$.

   Au prix unitaire de l'article de 1 euro, l'entreprise offre 18 000 articles.

   c. On résout l'équation $f(x) = 200$.

$$f(x) = 200 \Leftrightarrow 10 \times 1{,}8^x = 200 \Leftrightarrow 1{,}8^x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{\log(20)}{\log(1{,}8)}$$

   On a : $\dfrac{\log(20)}{\log(1{,}8)} \simeq 5{,}10$.

   Pour que l'entreprise veuille vendre 200 000 articles, elle doit fixer le prix de l'article à environ 5,10 euros.

2. **a.** Puisque $600 > 0$ et $0{,}7 \leqslant 1$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,7]$.

   b. On a : $g(1) = 600 \times 0{,}7^1 = 420$.

   Le nombre d'objets demandés lorsque le prix est égal à 1 euro est égal à 420 00.

   c. On a :

$$g(x) < 100 \Leftrightarrow 600 \times 0{,}7^x < 100 \Leftrightarrow 0{,}7^x < \frac{1}{6} \Leftrightarrow x > \frac{\log\left(\frac{1}{6}\right)}{\log(0{,}7)}$$

   On a : $5{,}02 < \dfrac{\log\left(\frac{1}{6}\right)}{\log(0{,}7)} < 5{,}03$.

   Si le prix de l'article est supérieur à 5,02 euros, alors le nombre d'objets demandés est inférieur à 100 000.

3. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 10 \times 1{,}8^x = 600 \times 0{,}7^x \\ &\Leftrightarrow \log(10) + x\log(1{,}8) = \log(600) + x\log(0{,}7) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log(600) - \log(10)}{\log(1{,}8) - \log(0{,}7)} \simeq 4{,}34 \end{aligned}$$

Le prix d'équilibre est environ égal à 4,34 euros.

~ 4 points **EXERCICE 3**

1. On a : $L = 120 + 9{,}2 \times \log\left(\dfrac{2{,}6}{13 \times 10^2}\right) \simeq 95$.

   Le niveau sonore L est environ égal à 95 (dB).

2. **a.** On a :

$$\begin{aligned} L &= 120 + 9{,}2 \times \log\left(\frac{0{,}01}{13D^2}\right) \\ L &= 120 + 9{,}2 \times \big(\log(0{,}01) - (\log(13) + 2\log(D))\big) \\ L &= 120 - 18{,}4 - 9{,}2\log(13) - 18{,}4\log(D) \\ L &= 101{,}6 - 9{,}2\log(13) - 18{,}4\log(D) \end{aligned}$$

   b. Puisque $-18{,}4\log(10D) = -18{,}4\log(D) - 18{,}4$, alors le niveau d'intensité sonore diminue de 18,4 (dB) lorsque la distance est multipliée par 10.