FONCTION INVERSE

(SUJET DE SECOURS)

Un entreprise fabrique chaque semaine une quantité x, en tonnes, de produit chimique.

Elle produit entre 10 et 100 tonnes chaque semaine. Le coût total de x tonnes produites est donné par la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;\,100]$ par :

$$C(x) = 3x^2 + 40x + 2\,700$$

PARTIE A. COÛT MOYEN UNITAIRE

Le coût moyen unitaire est le coût moyen d'une tonne de produit lorsque x tonnes sont produites.

On appelle C_M la fonction représentant le coût moyen unitaire : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$: $C_M(x) = 3x + 40 + \dfrac{2\,700}{x}$.
2. Calculer $C'_M(x)$.
3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$: $C'_M(x) = \dfrac{3\,(x-30)\,(x+30)}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]10\,;\,100]$.
5. Quel est le coût moyen unitaire minimal ? Pour quelle quantité de produit chimique est-il atteint ?

PARTIE B. COÛT MARGINAL

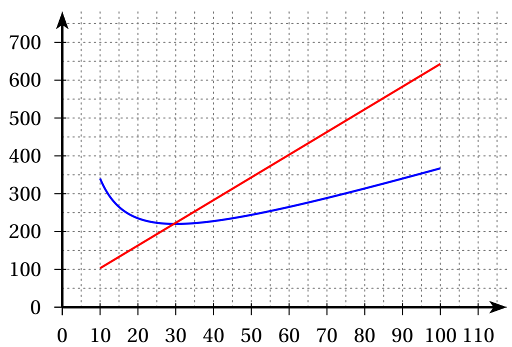
Le coût marginal est le supplément de coût engendré par la production d'une tonne de produit supplémentaire.

On appelle C_m la fonction représentant le coût marginal : $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

1. Calculer $C_m(20)$. Interpréter ce résultat avec les données de l'énoncé.
2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;\,100]$: $C_m(x) = 6x + 43$.
3. Déterminer $C'(x)$. Quelle est la différence entre $C_m(x)$ et $C'(x)$?

PARTIE C. COMPARAISON DU COÛT MARGINAL ET DU COÛT MOYEN

La courbe $\mathscr{C}$ représentant le coût moyen et la droite $\mathscr{D}$ représentant le coût marginal sont représentées sur le graphique ci-contre :



Une règle économique affirme que le coût moyen unitaire est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

Cette règle s'applique-t-elle ici ?