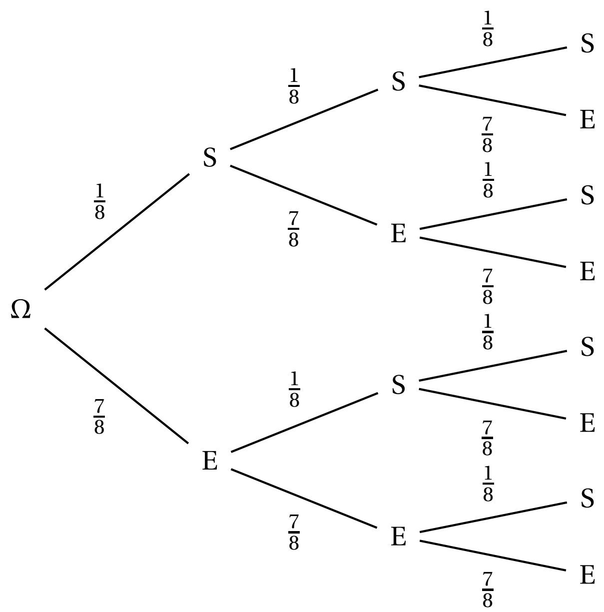
VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI BINOMIALE

(SUJET DE SECOURS)

EXERCICE 1

1. Arbre pondéré.



2. On répète $n = 3$ fois et de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli qui consiste à faire un tour de roue, où le succès est S : « Le logo du magasin sort lors du tour de roue », de probabilité $p = \frac{1}{8}$.

Le nombre de logos du magasin X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{8}$.

3. On a : $p(X = 0) = p(\text{EEE}) = \left(\dfrac{7}{8}\right)^3 \simeq 0{,}67$.

La probabilité de n'obtenir aucun logo du magasin est environ égale à 67 %.

4. **a.** On cherche $p(X = 2)$.

On a : $p(X = 2) = p(\text{SSE}) + p(\text{SES}) + p(\text{ESS}) = 3 \times \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 \times \dfrac{7}{8} \simeq 0{,}04$.

La probabilité que le client gagne 10 € est environ égale à 4 %.

b. On cherche $p(X = 3)$.

On a : $p(X = 3) = p(\text{SSS}) = \left(\dfrac{1}{8}\right)^3 \simeq 0{,}002$.

La probabilité que le client gagne 100 € est environ égale à 0,2 %.

c. On cherche $p(X \leqslant 1)$.

On a : $p(X \leqslant 1) = 1 - p(X = 2) - p(X = 3) = 1 - 0{,}04 - 0{,}002 = 0{,}958$.

La probabilité de ne rien gagner est bien supérieure à 0,95.

5. On a : $E(X) = n \times p = 3 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

Lorsqu'on fait tourner les 3 roues, on peut espérer voir en moyenne 0,375 fois le logo du magasin.

Remarque : En notant G le gain :

On a : $E(G) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \simeq 0{,}958 \times 0 + 0{,}04 \times 10 + 0{,}002 \times 100 \simeq 0{,}6$.

Un client peut espérer gagner en moyenne 0,60 €.

EXERCICE 2

1. L'élève répète $n = 6$ fois et de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli qui consiste à séparer le blanc du jaune lorsqu'elle casse un œuf, où le succès est S : « Elle réussit à séparer le blanc du jaune », de probabilité $p = \frac{5}{6}$.

   Le nombre de séparations réussies X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \dfrac{5}{6}$.

2. Triangle de Pascal jusqu'à $n = 6$:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

3. On a : $p(X = 4) = \dbinom{6}{4} \times p^4 \times (1-p)^2 = 15 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 \simeq 0{,}20$.

   La probabilité que l'élève réussisse à séparer les blancs des jaunes de 4 œufs est environ égale à 20 %.

4. On a : $E(X) = n \times p = 6 \times \dfrac{5}{6} = 5$.

   En moyenne, l'élève réussit à séparer les blancs des jaunes de 5 œufs.

5. On a : $p(X = 6) = \dbinom{6}{6} \times p^6 \times (1-p)^0 = 1 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^6 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^0 \simeq 0{,}335$.

   La probabilité que l'élève réussisse à séparer les blancs des jaunes de 6 œufs est environ égale à 33,5 %.

   Comme $33{,}5 > \dfrac{1}{3}$, alors l'élève n'utilisera qu'un récipient.