FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ TROIS

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)(x+7)$.

1. Donner le nom de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$ et son allure.
2. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et en donner une interprétation graphique.
3. Déterminer les coordonnées du sommet S de la courbe $\mathscr{C}$.
4. Étudier le signe de $f(x)$ dans un tableau de signes, ou à l'aide de l'allure de la parabole et des intersections avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 2

Étudier la fonction $f : x \mapsto -(x+2)(2x+1)$ en suivant les étapes vues à l'**exercice 1**.

EXERCICE 3

Dans chaque cas, on considère l'expression $f(x)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer alors l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée f'.

1. $f(x) = 7$.
2. $f(x) = 3x$.
3. $f(x) = -7x+1$.
4. $f(x) = -x$.
5. $f(x) = 5x+1$.
6. $f(x) = 3-2x$.
7. $f(x) = x^2 + x$.
8. $f(x) = 9x^2$.
9. $f(x) = -4x^2$.
10. $f(x) = x^3 - 3$.
11. $f(x) = 1 + x^3$.
12. $f(x) = x^3 - x$.
13. $f(x) = 5x^2 - x$.
14. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
15. $f(x) = -1 + 2x + x^2$.
16. $f(x) = x^3 + 7x + 1$.
17. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$.
18. $f(x) = 5 - 2x^3$.

EXERCICE 4

Un tonneau de vin de 100 litres se vide en 10 minutes.

A l'instant t, exprimé en minutes, la quantité de vin déjà vidée est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par l'expression :

$$f(t) = 20t - t^2$$

Le débit à l'instant t, exprimé en litres par minutes, est $f'(t)$.

1. Calculer $f'(t)$.
2. En déduire le débit de vin à l'instant $t = 5$.

EXERCICE 5

L'offre et la demande de poulets « label » sur un marché en gros sont modélisées par :

$$f(x) = 0{,}1x^3 + 5 \text{ et } g(x) = -0{,}05x^3 + 30$$

pour un prix x variant de 3 à 6 €/kg.

Les quantités échangées sur ce marché, $f(x)$ et $g(x)$, sont en tonnes.

1. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g sur l'intervalle $[3\,;\,6]$.
2. **a.** Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
   Arrondir le résultat à 0,01 près.
   b. En donner une signification concrète.
   c. Calculer la quantité de volailles échangées au prix d'équilibre, à 100 kg près.
   d. Calculer le chiffre d'affaires engendré par la vente de ces volailles au prix du marché.

EXERCICE 6

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Quel est le sens de variations de f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,15]$? sur l'intervalle $[15\,;\,+\infty[$?

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 6x - 10$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. Préciser sa nature et en quelle valeur de x il est atteint.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3{,}5x^2 - 3x + 1$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2x+3)(3x-1)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5~;~7]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 20$$

1. Démontrer que $f'(x) = 3(x+3)(x-5)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-5~;~7]$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-5~;~7]$.

EXERCICE 10

On considère le polynôme de degré 3 : $P(x) = (x+1)(x-5)(x-2)$.

1. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
2. Placer les racines de $P(x)$ sur un axe.
3. Calculer $P(x)$ pour une valeur de x différente des racines et donner son signe.
4. Appliquer l'alternance des signes + et − pour obtenir le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 11

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

1. Sur l'écran d'une calculatrice, visualiser la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.
2. Factoriser $P(x)$ au maximum.

EXERCICE 12

Un restaurateur conçoit entre 10 et 80 repas.

Le coût de conception de x repas, en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[10~;~80]$ par :

$$C(x) = 2x^2 - 160x + 3\,200$$

1. Calculer le coût de conception de 50 repas.
2. On suppose qu'un repas est facturé 40 euros.

   Montrer que le bénéfice $B(x)$, en euros, réalisé par la vente de x repas, est donné par :

   $$B(x) = -2x^2 + 200x - 3\,200$$

3. Montrer que pour tout $x \in [10~;~80]$, on a :

   $$B(x) = -2(x-20)(x-80)$$

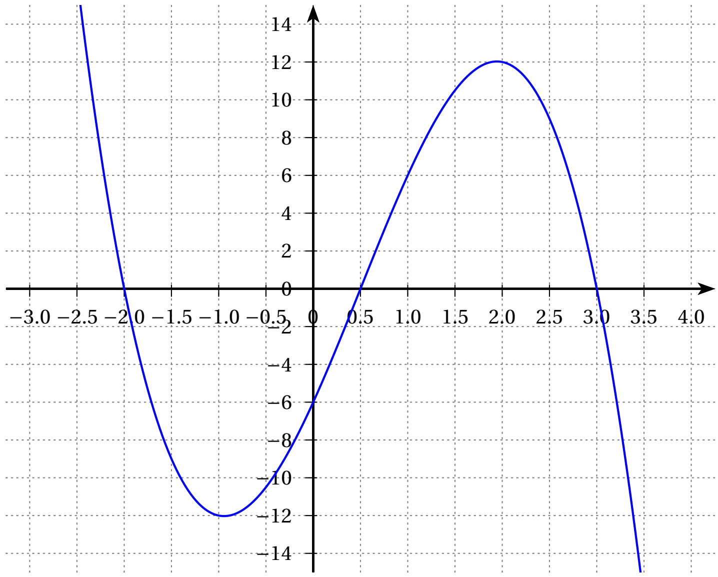
4. Déterminer le tableau de signes de $B(x)$ sur l'intervalle $[10~;~80]$.
5. Combien de repas le restaurateur doit-il concevoir et vendre pour réaliser un bénéfice ?
6. Déterminer le nombre de repas à concevoir et à vendre pour que le bénéfice soit maximal.

EXERCICE 13

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 3,5]$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$$

La fonction f est représentée sur le graphique ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement $f(1,5)$.
2. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -6$.
3. Calculer $f(1)$.
4. Vérifier que, pour tout réel $x \in [-2,5\ ;\ 3,5]$, on a : $f(x) = (1-2x)(x^2 - x - 6)$.
5. On admet que $f(x) = (1-2x)(x-3)(x+2)$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
6. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 3,5]$.

EXERCICE 14

Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire, en euros, réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes.

La fonction B est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 45]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

1. Calculer $B(10)$. Interpréter dans le contexte.
2. Calculer $B'(x)$.
3. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 45]$, $B'(x) = -3(x-5)(x-35)$.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 45]$.
5. En déduire le tableau de variations de la fonction B.
6. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? A combien s'élève-t-il alors ?

EXERCICE 15

La patronne d'un restaurant dispose d'un menu du soir à 15 €. En moyenne, elle sert 80 clients chaque soir.

Elle souhaite modifier le prix de son menu afin d'optimiser son bénéfice.

Une étude de son restaurant lui apporte les résultats suivants :

- Le coût de réalisation d'un menu est de 10 €.
- Une augmentation du prix entraîne une baisse du nombre moyen de clients chaque soir. Pour une augmentation de 1 €, cette baisse est estimée à 5 clients.

Pour une augmentation de x euros du prix du menu, on note $B(x)$ le bénéfice moyen réalisé en euro.

Par exemple, si le prix du menu passe à 16 €, alors $x = 1$ et $B(1) = 450$.

1. Pour une augmentation de x euros, donner en fonction de x :
   - **a.** Le prix du menu.
   - **b.** Le nombre de clients.
   - **c.** Le chiffre d'affaires par soir.
2. En déduire que $B(x) = -5x^2 + 55x + 400$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.
4. Lorsque le bénéfice est maximal :
   - **a.** Quelle est la valeur de x ?
   - **b.** Donner alors le prix du menu.
   - **c.** Quel est le bénéfice ?
   - **d.** Quel est le nombre moyen de clients par soir ?

EXERCICE 16

Une entreprise produit des bouteilles d'eau issue des glaciers. L'eau arrive sous forme de cubes de glace de 1 m de côté. Ces cubes sont mis à fondre et l'eau ainsi produite se déverse dans une cuve qui contient déjà 100 L d'eau.

Le volume d'eau dans la cuve en fonction du temps est donné par la fonction v définie par :

$$v(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 100$$

où x est le temps en heure, et $v(x)$ le volume d'eau en litre.

Maxime et Paula, deux employés, veulent connaître le débit, en L.h^{-1}, au bout de deux heures de fonte.

1. Maxime décide d'approcher ce débit en calculant le débit moyen entre 2 heures et 4 heures.
   - **a.** Calculer $v(2)$, le volume présent dans la cuve au bout de 2 heures, puis $v(4)$.
   - **b.** En déduire la quantité d'eau produite entre 2 heures et 4 heures.
   - **c.** Calculer le débit moyen entre 2 heures et 4 heures.
2. Paula rappelle que l'on peut obtenir le débit instantané à n'importe quel moment et de manière exacte avec la fonction dérivée de v.
   - **a.** Calculer $v'(x)$.
   - **b.** Calculer $v'(2)$, le débit instantané, en L.h^{-1}, après 2 heures de fonte.
   - **c.** Comparer ce résultat avec celui de Maxime.

Exercice 17

Une entreprise produit des pizzas surgelées. On suppose qu'elle vend toute sa production par lots de 25 pizzas, à la grande distribution.

L'entreprise produit entre 10 et 100 lots par jour et le prix de vente d'un lot est égal à 78,50 €.

On estime que le coût total par jour de production, incluant les salaires, les ingrédients, les différentes charges, est donné par :

$$C(x) = 0{,}02x^3 - 2{,}5x^2 + 116x + 880$$

avec $x \in [10\ ;\ 100]$, où x est le nombre de lots fabriqués, et $C(x)$ est le coût de fabrication de x lots, en euro.

Partie A. Coût marginal

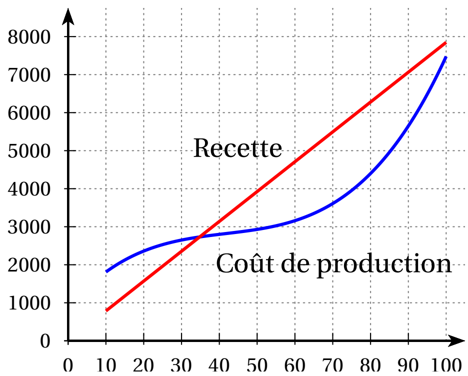
1. Calculer $C'(x)$.
2. On sait que le coût marginal $C_m(x)$ peut être assimilé à $C'(x)$. On pose : $C_m(x) = C'(x)$.
   a. Calculer $C'_m(x)$.
   b. Étudier les variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[10\ ;\ 100]$.
   c. Représenter graphiquement la fonction C_m sur la calculatrice.
3. Il est intéressant pour l'entreprise de continuer à produire tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, soit 78,50 €.
   a. Tracer sur le graphique précédent la droite d'équation $y = 78{,}50x$.
   b. Déterminer graphiquement jusqu'à quelle valeur de x il est intéressant pour l'entreprise de continuer à produire.

Partie B. Étude du bénéfice

On pose $R(x) = 78{,}50x$, la recette en euro, pour x lots vendus.

Le bénéfice $B(x)$, pour x lots fabriqués et vendus, est la différence entre la recette et le coût de production. On pose : $B(x) = R(x) - C(x)$.

On a représenté les fonctions C et R dans le repère ci-dessous :



1. Par lecture graphique, estimer la valeur de x pour laquelle le bénéfice est maximal ? Expliquer le raisonnement.
2. **a.** Démontrer que : $B(x) = -0{,}02x^3 + 2{,}5x^2 - 37{,}5x - 880$.
   b. Calculer $B'(x)$.
   c. Démontrer que $B'(x) = (-0{,}6x + 0{,}5)(x - 75)$.
   d. Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau de variations de B sur $[10\ ;\ 100]$.
   e. Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?