FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

EXERCICE 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $10^x = 2$
2. $10^x = 3{,}25$
3. $10^x = 7{,}28$
4. $5 \times 10^x = 3{,}375$
5. $3{,}2 + 2 \times 10^x = 4{,}5 \times 10^x$
6. $-17{,}3 + 10^x = 5 - 3 \times 10^x$
7. $4{,}5 \times 10^x = 3 \times 10^x + 1$
8. $3{,}4 \times 10^x = 5 \times 10^{2x}$
9. $10^{2x} + 4 \times 10^x - 1 = 0$

EXERCICE 2

Abréviation du terme « potentiel hydrogène », le pH précise si un milieu est acide, neutre ou basique. L'acidité dépend en effet de la concentration en ions hydronium H_3O^+ qui se calcule en fonction du pH par :

$$[H_3O^+] = 10^{-\mathrm{pH}}$$

Calculer le pH des liquides suivants.

1. Un jus de citron dont la concentration en ions hydronium est de 0,005 mol.L^{-1}.
2. Du lait dont la concentration en ions hydronium est de $3{,}16 \times 10^{-7}$ mol.L^{-1}.
3. Du sang humain dont la concentration en ions hydronium est de $4{,}42 \times 10^{-8}$ mol.L^{-1}.

EXERCICE 3

Comparer les nombres suivants :

1. $\log(102)$ et $\log(25)$
2. $\log(256)$ et $\log\left(2^9\right)$
3. $\log\left(10^{3,6}\right)$ et 3,7

EXERCICE 4

Donner le signe des nombres suivants :

1. $\log(2{,}5)$
2. $\log(0{,}25)$
3. $\log\left(\dfrac{7}{10}\right)$

EXERCICE 5

On place une somme de 2 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 5,5 %. Les trois affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La somme disponible dans 5 ans est $2\,000 \times 1{,}055 \times 5$.
2. Pour déterminer l'année à partir de laquelle la somme aura doublé, on peut résoudre l'équation : $1{,}055^n = 2$.
3. La solution de l'équation précédente est $\log\left(\dfrac{2}{1{,}055}\right)$.

EXERCICE 6

Exprimer en fonction de log (5) et log (3) les nombres suivants :

1. $\log(5\times 9)$ **2.** $\log\left(\dfrac{5}{9}\right)$ **3.** $\log\left(5^3\right)$ **4.** $\log\left(3^5\right)$

EXERCICE 7

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\log\left(10^5\right)$ **2.** $\log\left(10^{-9}\right)$ **3.** $\log\left(\dfrac{10^3}{10^{-2}}\right)$ **4.** $\log\left(\dfrac{10^{-2}}{10^{-2}}\right)$

EXERCICE 8

Exprimer en fonction de log (a) et log (b) les nombres suivants :

1. $\log\left(a^3\right)$ **2.** $\log\left(a^{-5}\right)$ **3.** $\log\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)$ **4.** $\log\left(a^6b^3\right)$

EXERCICE 9

la loi de Benford est largement utilisée pour détecter des fraudes fiscales. Elle repose sur la fréquence d'apparition des différents chiffres dans les valeurs numériques.

Ainsi, Benford a constaté que, dans une liste de données statistiques, le premier chiffre non nul est 1 dans plus du tiers des observations. Puis le 2 est plus fréquent que le 3 etc... La probabilité d'obtenir 9 n'est que de 0,046.

De façon générale, la loi donne comme fréquence théorique p d'apparition du premier chiffre non nul a d'un nombre :

$$p = \log\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

1. En utilisant la loi de Benford, recopier et compléter le tableau suivant afin de déterminer la fréquence théorique d'apparition, en %, du premier chiffre non nul d'un nombre.

Premier chiffre non nul a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréquence théorique p									

2. On veut savoir si la loi de Benford s'applique avec certaines séquences de nombres particuliers.

Dans la liste des 2 000 premières puissances de 2, on a compté le nombre de fois où chaque chiffre apparaît en premier :

Premier chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'apparitions	602	354	248	194	160	134	114	105	89

Esc-ce que cette distribution des chiffres est compatible avec la loi de Benford ?

EXERCICE 10

La densité optique D d'un milieu est donnée par : $D = -\log(T)$, où T désigne le facteur de transmission du milieu $(0 < T \leqslant 1)$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~1]$ par $f(x) = -\log(x)$.

1. **a.** Tracer la courbe représentative de f.
   b. Placer sur les axes du graphique les grandeurs D et T.
2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~1]$.
3. En utilisant la courbe, déterminer :
   a. La densité optique d'un milieu dont le facteur de transmission est de 0,4.
   b. Le facteur de transmission lorsque la densité optique est égale à 1.
4. Retrouver par le calcul les résultats de la question **3**.

EXERCICE 11

Écrire les nombres suivants sous la forme $\log(A)$, où A est un nombre réel que l'on précisera :

1. $\log(2) + \log(7) - \log(5)$
2. $\log(3) - 2\log(5)$
3. $\log(3) + \log(7)$
4. $3\log(7) - 7\log(3)$
5. $\log(12) - \log(4) + 2\log(3)$
6. $3\log(2) - 2\log(5) + 5\log(10)$

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \log\left(1 + 10^x\right)$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0	0,5	1	2	5	10	15	20
$f(x)$								

2. Représenter la fonction f dans un repère.
3. Par quelle fonction peut-on donner une approximation de la fonction f ?
4. Déterminer l'intervalle sur lequel l'écart entre les deux fonctions est inférieur à 10^{-2}.

EXERCICE 13

1. Un premier capital de 6 000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 9 %.

   Au bout de combien d'années ce capital aura-t-il doublé ? Triplé ?
2. Un deuxième capital de 9 000 euros est placé le même jour à intérêts composés au taux annuel de 6 %.

   Au bout de combien d'années la valeur du premier capital aura-t-elle dépassé le second ?

EXERCICE 14

La production d'une entreprise diminue de 6 % par an.

En combien d'années sera-t-elle divisée par 2 ?

EXERCICE 15

On place un capital de 10 000 € à intérêts composés au taux annuel de 0,8 %.

1. Déterminer le capital acquis après 3 années.
2. Montrer que le capital acquis après le premier mois est de 10 006,64 €.
3. Quel est le capital acquis après 5 ans et 4 mois ?

EXERCICE 16

On place un capital de 12 000 € à intérêts composés au taux annuel de 5 %.

1. Déterminer le capital acquis au bout de 6 ans, 5 mois et 15 jours.
2. En déduire les intérêts acquis pendant cette période.
3. On a acquis 2 205,64 € d'intérêts. Pendant combien de temps le capital est-il resté placé ?

EXERCICE 17

On place un capital de 15 500 € à intérêts composés pendant 4 ans et demi. un deuxième capital de 16 480 € est lui aussi placé à intérêts composés durant 5 ans et 3 mois au taux annuel de 6 %.

Quel doit être le taux de placement du premier capital pour que les capitaux en fin de placement soient identiques ?

EXERCICE 18

Soit N un entier naturel non nul.

Le but de l'exercice est de trouver une méthode permettant de déterminer le nombre de chiffres de son écriture décimale.

1. $N = 10\ 203$.
   - **a.** Encadrer N entre deux puissances de 10 consécutives. En déduire un encadrement de $\log(N)$ entre deux entiers consécutifs.
   - **b.** En déduire la valeur arrondie par excès à l'unité près de $\log(N)$. Comparer ce résultat avec le nombre de chiffres de N.
2. N possède 23 chiffres.
   - **a.** Encadrer N entre deux puissances de 10 consécutives. En déduire un encadrement de $\log(N)$ entre deux entiers consécutifs.
   - **b.** Donner la valeur arrondie par excès à l'unité près de $\log(N)$.
     Quelle valeur retrouve-t-on ?
3. Déduire des questions précédentes une méthode pour déterminer le nombre de chiffres de chaque entier naturel non nul lorsque celui-ci est donné sous sa forme décimale.
4. Utiliser la méthode précédente pour déterminer le nombre de chiffres des entiers suivants :
   a. 7^{49} **b.** 56^{58} **c.** $2\ 019^{2\ 020}$
5. Le plus grand nombre premier connu à ce jour est un nombre de Mersenne qui s'écrit : $2^{82\ 589\ 933} - 1$.

   Combien possède-t-il de chiffres ?

EXERCICE 19

Une balle rebondissante tombe d'une hauteur de 150 m. La hauteur atteinte par la balle diminue de 30 % après chaque rebond.

1. Déterminer la hauteur du troisième rebond de cette balle.
2. Au bout de combien de rebonds la hauteur du rebond de la balle est-elle de 4 m ?
3. On considère que la balle est immobile dès que la hauteur du rebond est inférieure à 1 mm.
   - **a.** Au bout de combien de rebonds la balle est-elle considérée comme immobile ?
   - **b.** Déterminer la distance totale parcourue par la balle avant d'être considérée comme immobile.

EXERCICE 20

Une entreprise décide de produire 4 000 pièces le premier mois et de diminuer sa production de 5 % sa production chacun des mois suivants jusqu'à ce que cette production devienne inférieure à 2 000 pièces afin de s'arrêter.

On note u_n la production au cours du mois n.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Résoudre l'inéquation : $0{,}95^x \leqslant 0{,}5$.
5. Indiquer le rang du mois où la production sera arrêtée.

EXERCICE 21

La vente grand public sur Internet affiche en France une croissance moyenne de 20 % chaque année depuis 2010. En 2010, le chiffre d'affaires est de 2 milliards d'euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires des années 2011 et 2012.
2. **a.** Ces chiffre d'affaires successifs sont les premiers termes d'une suite géométrique (u_n). Indiquer sa raison et son premier terme u_0.
   - **b.** Exprimer u_n en fonction de n.
   - **c.** Calculer le chiffre d'affaires prévu en 2015.
3. En quelle année le chiffre d'affaires prévisionnel dépassera-t-il 12 milliards d'euros ?

EXERCICE 22

Dans un autocuiseur, la pression p, en atmosphère, est donnée en fonction de la température t, en degré Celsius, par la formule :

$$p = \left(\frac{t}{100}\right)^4$$

1. Calculer la pression correspondant à une température de 120 °C puis à une température de 130 °C.
2. Calculer la température à un degré près pour une pression de 2 atmosphères puis pour une pression de 1,8 atmosphères.
3. L'autocuiseur est muni d'une soupape de sécurité qui limite la pression à la valeur maximale 1,5 atmosphères.

   Quelle est la température maximale de l'autocuiseur ?

EXERCICE 23

Charles Francis Richter, sismologue américain (1900-1985), créa en 1935 une échelle afin de classer les séismes. Ceux-ci y sont classés selon leur magnitude M.

Depuis, d'autres échelles ont été créées avec différents types de magnitudes.

Ici, on considère la magnitude liée à l'énergie. L'énergie E (en joule, J) libérée lors d'un séisme de magnitude M est :

$$\log(E) = 4{,}5 + 1{,}5M$$

1. **a.** Déterminer l'énergie libérée par le séisme de Sumatra (Indonésie), le 24/12/2004, sachant que sa magnitude est de 9,3.

   b. L'explosion de la bombe atomique Little Boy, lâchée sur Hiroshima le 6 août 1945, a dégagé une énergie de $6{,}3 \times 10^{13}$ J.

   Exprimer l'énergie dégagée par le séisme de Sumatra en fonction de celle dégagée par Little Boy.

2. Classer les séismes ci-dessous, en fonction de l'énergie dégagée (du plus grand au plus petit).
   - Haïti, le 12/01/2010, séisme d'une magnitude de 7.
   - Montendre (près de Bordeaux), le 20/03/2019, séisme d'une énergie de $7{,}08 \times 10^{11}$ J.
   - Katmandou (Népal), le 25/04/2015, séisme 355 fois plus énergétique que Little Boy.

3. Compléter la phrase suivante :

   « Entre un séisme de magnitude 4 et un séisme de magnitude 8, l'énergie dégagée est multipliée par ... ».

EXERCICE 24

Mme Dumont souhaite emprunter 175 000 € pour acheter une maison.

Le banquier lui propose un crédit à taux fixe de 1,2 % par an.

Mme Dumont peut rembourser 675 € tous les mois. Elle calcule le nombre d'annuités nécessaires pour rembourser cet emprunt.

1. Pour déterminer un taux mensuel, connaissant le taux annuel du crédit immobilier, les banques utilisaient jusqu'au 1/10/2016 la méthode dite « proportionnelle » : le taux mensuel est égal au douzième du taux annuel.

   Déterminer le taux mensuel du crédit proposé par le banquier.

2. Chaque mois, Mme Dumont rembourse les intérêts et une partie du capital initial.

   a. Déterminer les intérêts dus le premier mois. En déduire que le nouveau capital à rembourser est 174 500 €.

   b. Recommencer le calcul pour le deuxième mois.

3. On peut montrer que, si C_0 est le capital initialement emprunté, C_n le capital restant à rembourser après n mois, t le taux mensuel de crédit et m le montant de la mensualité, alors on a :

   $$C_n = C_0 \times (1+t)^n - m \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

   En déduire le nombre de mois nécessaires pour rembourser le crédit immobilier de Mme Dumont.

4. Déterminer le coût réel du crédit.

EXERCICE 25

The amount of capital, invested at compound interest, is given by :

$$C_n = C_i\left(1+\frac{t}{100}\right)^n$$

where C_n is the amount of capital invested at the end of n years, C_i is the initial capital and t is the rate expressed as a percentage.

1. Calculate the rate at which a capital of € 3,000 would have to be invested in order to be doubled after 10 years.
2. With the previous rate, calculate the number of years it would take for the capital to be triple the initial capital.

EXERCICE 26

L'échelle de Beaufort, qui mesure la force du vent, comporte 13 degrés (de 0 à 12). Le degré Beaufort B est lié à la vitesse moyenne du vent v (en km.h^{-1}) par :

$$B^3 = \frac{v^2}{9}$$

1. **a.** Calculer le degré Beaufort, arrondi à l'unité, pour une vitesse $v = 90$ km.h^{-1}.
   b. Calculer la vitesse du vent v (en km.h^{-1}) correspondant à un vent de force 10 Beaufort.
2. Démontrer que la relation entre B et v peut s'écrire :

$$\log(v) = \frac{3}{2}\times\log(B)+0{,}477$$

3. Si on représente, dans un repère log-log, v en fonction de B, quelle est l'allure de la représentation graphique ?
4. **a.** A l'aide de la calculatrice, entrer dans la liste **L1** les valeurs de B allant de 1 à 12. Obtenir dans **L2** les valeurs de $\log(B)$, puis dans **L3** celles de $\log(v)$.
   b. Quelle instruction doit-on saisir pour faire calculer les valeurs de v dans **L4** ?
5. Compléter le tableau ci-dessous :

Degré Beaufort	Terme générique	Vitesse v (en km.h^{-1})	Observations
6	Vent frais	39 à 49	Des lames se forment ; crêtes d'écume blanches plus étendues
3	Petite brise	…	Très petites vagues, écume d'aspect vitreux
…	Tempête	88 à 102	Très grosses lames à longues crêtes en panache ; déferlement en rouleaux intense et brutal
5	Bonne brise	…	Vagues modérées, allongées ; moutons nombreux