Lycée Jean DROUANT
École Hôtelière de PARIS
20, rue Médéric
75 017 PARIS

COURS DE MATHÉMATIQUES
TERMINALE PRO

Emmanuel DUPUY
Emmanuel-R.Dupuy@ac-paris.fr

PARIS
Année 2024-2025

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

SUITES NUMÉRIQUES

§ 1. Suites numériques

a. Suite numérique

EXEMPLE

- Burgers

  Le tableau suivant présente l'évolution de la consommation de burgers, en milliard, par les français entre 2012 et 2015 :

Année	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année	0	1	2	3
Nombre de burgers consommés	0,92	0,97	1,07	1,19

On note u_n et on lit « u indice n » le nombre de burgers consommés l'année $2012+n$.

Ainsi : $u_0 = 0{,}92$; $u_1 = 0{,}97$; $u_2 = 1{,}07$; $u_3 = 1{,}19$.

DÉFINITION

- Une *suite numérique* (u_n) est une liste numérotée de nombres.
- L'entier naturel n s'appelle le *rang*.
- Le nombre u_n s'appelle le *terme* de rang n de la suite.

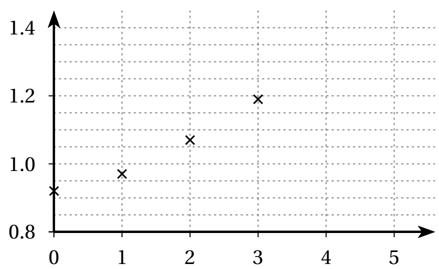
b. Représentation graphique

MÉTHODE

On peut représenter une suite (u_n) en plaçant dans un repère les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

EXEMPLE

- Burgers



c. Sens de variations

DÉFINITION

- Une suite (u_n) est une *suite croissante* lorsque, pour tout entier n :

$$u_n < u_{n+1}$$

Autrement dit, chaque terme est inférieur au terme suivant.

- Une suite (u_n) est une *suite décroissante* lorsque, pour tout entier n :

$$u_n > u_{n+1}$$

Autrement dit, chaque terme est supérieur au terme suivant.

EXEMPLE

- Burgers
  Puisque $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$, alors la consommation de burgers forme une suite croissante.

§ 2. Modes de génération d'une suite

a. Suite définie par une relation de récurrence

EXEMPLE

- Nombres impairs
  La suite des nombres impairs est définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence valable pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

Par exemple, on a :
$u_1 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$.
$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5$.

b. Suite définie par une relation fonctionnelle

EXEMPLE

- Nombres impairs
  La suite des nombres impairs est définie par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par l'expression $f(x) = 2x + 1$, et, pour tout entier n :

$$u_n = 2n + 1$$

Par exemple, on a :
$u_{1\,000} = 2 \times 1\,000 + 1 = 2\,001$.
$u_{2\,024} = 2 \times 2\,024 + 1 = 4\,049$.

§ 3. Suites géométriques

a. Suite géométrique

DÉFINITION

Soit q un nombre strictement positif.
Une suite (u_n) est une *suite géométrique* de *raison* q lorsque, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

EXEMPLE

- Population

  Le 1er janvier 2010, la population d'une ville nouvelle est de 10 000 habitants.

  La population augmente régulièrement de 5 % par an.

  On note u_n la population de la ville au bout de n années depuis le 1er janvier 2010.

  Puisque la population augmente de 5 % par an, alors pour tout entier n : $u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n$.

  Par **DÉFINITION**, la suite (u_n) des populations est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10\,000$ et de raison $q = 1{,}05$.

CONTRE-EXEMPLE

- Burgers

  On a : $\dfrac{u_1}{u_0} \simeq 1{,}05$ mais $\dfrac{u_2}{u_1} = 1{,}10$.
  La consommation de burgers en France ne forme pas une suite géométrique.

b. Représentation graphique

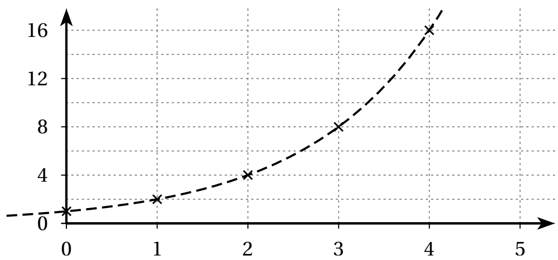
PROPRIÉTÉ

Si (u_n) est une suite géométrique, alors l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;\ u_n)$ est situé sur une *courbe exponentielle*.

EXEMPLE

- Puissances de deux

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	2	4	8	16	32



c. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$.

- Si $q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.
- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.

d. Expression de u_n en fonction de n

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout entier n :

$$u_n = q^n \times u_0$$

EXEMPLE

- Population

  La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 10 000 et de raison 1,05 donc, par **PROPRIÉTÉ**, pour tout entier n : $u_n = 1{,}05^n \times 10\,000$.

  Par exemple le 1er janvier 2020, $n = 10$ et $u_{10} = 1{,}05^{10} \times 10\,000 \simeq 16\,289$.

  Ainsi, au bout de dix ans, la population sera environ égale à 16 289 habitants.

e. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

PROPRIÉTÉ

La somme S de p termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ dont le premier terme est a est donnée par :

$$S = a \times \frac{1-q^p}{1-q}$$

EXEMPLE

- $S = 1+2+4+8+16+32+64+128$

  La somme S est la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 dont le premier terme est 1 donc :

  $$S = 1 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 255$$

CHAPITRE 2

FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ TROIS

§ 1. Fonction cube

a. Fonction cube

DÉFINITION

La *fonction cube* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

$$f(x) = x^3$$

EXEMPLE

- $f(2) = 2^3 = 8$.
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.
- $f(-4) = (-4)^3 = -64$.

b. Fonction dérivée

PROPRIÉTÉ

En notant f' la fonction dérivée de la fonction cube, on a :

$$f'(x) = 3x^2$$

c. Sens de variations

REMARQUE

Si la fonction dérivée f' d'une fonction f est positive sur un intervalle, alors la fonction f est croissante sur cet intervalle.

PROPRIÉTÉ

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

d. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

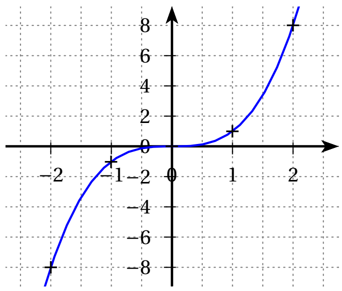
La courbe représentative de la fonction cube dans un repère (O ; I, J) est une cubique de centre de symétrie l'origine O.

MÉTHODE

On dresse un tableau de valeurs :

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	8

On place dans un repère les points de coordonnées $\big(x\ ;\ f(x)\big)$ obtenus par le tableau de valeurs ainsi que leur symétrique par rapport à l'origine du repère.



§ 2. Fonctions polynômes de degré trois

a. Fonction polynôme de degré trois

DÉFINITION

Une *fonction polynôme de degré trois* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c et d sont quatre nombres, avec $a \neq 0$.

EXEMPLE

- Tempérage
  Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner une forme idéale pour réaliser des enrobages.
  On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 12{,}5]$ par :
  $$f(x) = 0{,}14x^3 - 3{,}15x^2 + 18{,}48x + 18$$
  Lorsque x représente le temps, en minutes, on admet que $f(x)$ modélise la température, en degrés Celsius, du chocolat à l'instant x, au cours d'une opération de tempérage.
  La fonction f est une fonction polynôme de degré trois avec $a = 0{,}14$, $b = -3{,}15$, $c = 18{,}48$ et $d = 18$.

b. Fonction dérivée

PROPRIÉTÉ

En notant f' la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré trois, on a :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

EXEMPLE

- Tempérage

$$f(x) = 0{,}14x^3 - 3{,}15x^2 + 18{,}48x + 18$$
$$f'(x) = 3 \times 0{,}14x^2 - 2 \times 3{,}15x + 18{,}48$$
$$f'(x) = 0{,}42x^2 - 6{,}30x + 18{,}48$$

c. Etude d'une fonction polynôme de degré trois

EXERCICE

- Tempérage

1. Vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,12{,}5]$: $f'(x) = 0{,}42(x-4)(x-11)$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12{,}5]$.
3. Quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?

SOLUTION

1. On a : $0{,}42(x-4)(x-11) = 0{,}42(x^2 - 15x + 44) = 0{,}42x^2 - 6{,}30x + 18{,}48 = f'(x)$.
2. Tableau de variations de la fonction f :

   D'après un résultat de la classe de **PREMIÈRE**, la dérivée $f'(x)$ est négative entre ses racines 4 et 11 et positive « ailleurs ».

x	0		4		11		12,5
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	18	↗	50,48	↘	26,47	↗	30,25

3. D'après le tableau de variations de la fonction f, la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat est égale à 50,48 °C.

CHAPITRE 3

FONCTIONS EXPONENTIELLES

§ 1. Fonctions exponentielles

a. Fonction exponentielle de base q

DÉFINITION

Soit q un nombre strictement positif.

La *fonction exponentielle de base q* est la fonction $x \mapsto q^x$ définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

- Sur $\mathbb{R}^+$ comme le prolongement à l'ensemble des nombre positifs de la suite géométrique (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$.
- Sur $\mathbb{R}^-$ en convenant que pour tout nombre positif x :

$$q^{-x} = \frac{1}{q^x}$$

b. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction exponentielle de base $q > 0$.

- Si $q > 1$, alors la fonction f est strictement croissante.
- Si $q < 1$, alors la fonction f est strictement décroissante.

EXEMPLE

- $x \mapsto -3 \times 1{,}2^x$
  Comme $1{,}2 > 1$, alors la fonction $x \mapsto 1{,}2^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  Comme $-3 < 0$, alors la fonction $x \mapsto -3 \times 1{,}2^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. Positivité

PROPRIÉTÉ

Pour tout nombre $q > 0$, pour tout nombre x :

$$q^x > 0$$

Autrement dit, la fonction exponentielle de base q est strictement positive.

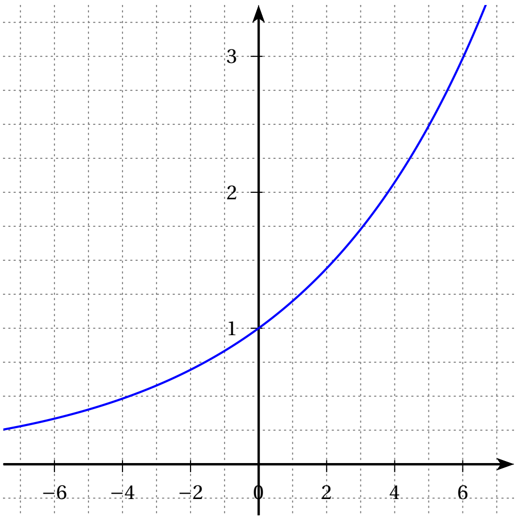
d. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

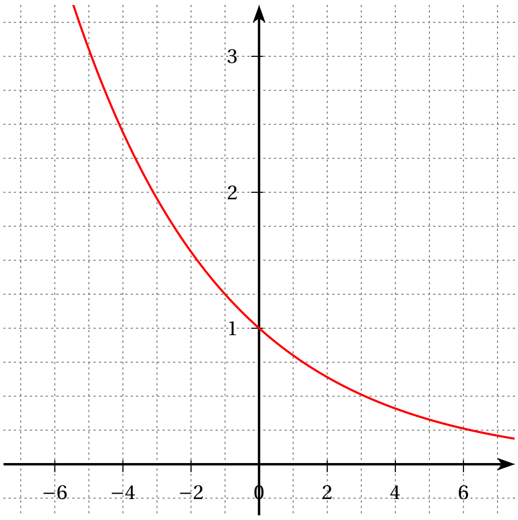
La représentation graphique de la fonction exponentielle de base $q > 0$ est une *courbe exponentielle* qui passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

EXEMPLE

- $f(x) = 1{,}2^x$



- $g(x) = 0{,}8^x$



§ 2. Propriétés algébriques

a. Propriétés de la fonction exponentielle de base q

PROPRIÉTÉ

Pour tout nombre $q > 0$, pour tous nombre x et y, et pour tout entier relatif n :

- $q^{x+y} = q^x \times q^y$
- $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$
- $q^{nx} = \left(q^x\right)^n$

REMARQUE

Cette **PROPRIÉTÉ** sert à simplifier des expressions algébriques.

b. Racine n-ième d'un nombre positif

DÉFINITION

Soit n un entier naturel non nul.

La *racine n-ième* d'un nombre $a > 0$ est le nombre positif x tel que : $x^n = a$.

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul.
La racine n-ième d'un nombre $a > 0$ est égale à $a^{\frac{1}{n}}$.

EXEMPLE

La racine cubique de 64 est égale à 4 car $4^3 = 64 \Leftrightarrow 64^{\frac{1}{3}} = 4$.

c. Application au calcul du taux moyen

MÉTHODE

Pour calculer un taux moyen t_{moyen} équivalent à un taux global t_{global} sur une période n fois plus petite, on utilise la formule :

$$1 + t_{\text{moyen}} = \left(1 + t_{\text{global}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

EXEMPLE

- En 6 mois, le prix d'un bien de consommation a diminué de 12 %.
  On connait $t_{\text{semestriel}} = -12$ %. On peut calculer t_{mensuel}.
  On a :

$$\begin{aligned} 1 + t_{\text{mensuel}} &= (1 + t_{\text{semestriel}})^{\frac{1}{n}} = 0{,}88^{\frac{1}{6}} \simeq 0{,}978\,9 \\ t_{\text{mensuel}} &\simeq 0{,}978\,9 - 1 \simeq -0{,}021\,1 \simeq -2{,}11\ \% \end{aligned}$$

  La baisse mensuelle moyenne est environ égale à 2,11 %.

CHAPITRE

4

PROBABILITÉS

§ 1. Probabilités conditionnelles

a. Probabilité conditionnelle

EXEMPLE

Le tableau d'effectifs suivant donne la répartition en LV2 des 500 élèves d'un lycée :

	Allemand	Espagnol	Total
Filles	**140**	60	200
Garçons	180	120	300
Total	**320**	180	**500**

On tire au hasard, parmi le fichier des élèves du lycée, la fiche d'un élève et on veut calculer de deux manières la probabilité que l'élève soit une fille germaniste, c'est à dire $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})$, en notant F l'événement : « l'élève est une fille » et A l'événement : « l'élève est germaniste ».

1$^{\text{ère}}$ manière :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F}) = \frac{\text{nbre de filles germanistes}}{\text{nbre d'élèves}} = \frac{140}{500} = 0{,}28$$

2$^{\text{ème}}$ manière :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F}) = \frac{\text{nbre de germanistes}}{\text{nbre d'élèves}} \times \frac{\text{nbre de filles germanistes}}{\text{nbre de germanistes}} = \frac{320}{500} \times \frac{140}{320} = 0{,}28$$

Ainsi, en notant $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{F})$ la probabilité que l'élève soit une fille sachant que l'élève est germaniste, on a :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{F})$$

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur un univers Ω et un événement A tel que $p(\mathrm{A}) \neq 0$.

Pour tout événement B, la *probabilité de* B *sachant* A, notée $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, est définie par :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$$

COROLLAIRE

Dans les conditions précédentes :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$

EXERCICE

On tire successivement et sans remise deux boules d'une urne contenant cinq boules rouges et deux boules bleues.

Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

SOLUTION

On note les événements A : « la 1ère boule est rouge » et B : « la 2ème boule est rouge ».

On cherche $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

On a : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{20}{42} = \dfrac{10}{21}$.

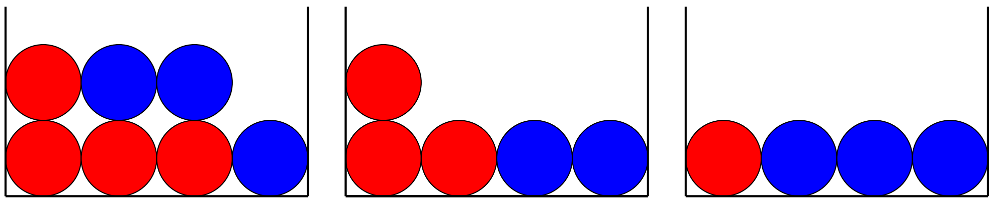
b. Arbre pondéré et formule des probabilités totales

EXEMPLE

- Urnes U, V et W

  On considère les trois urnes U, V et W schématisées ci-dessous.

  On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans cette urne.

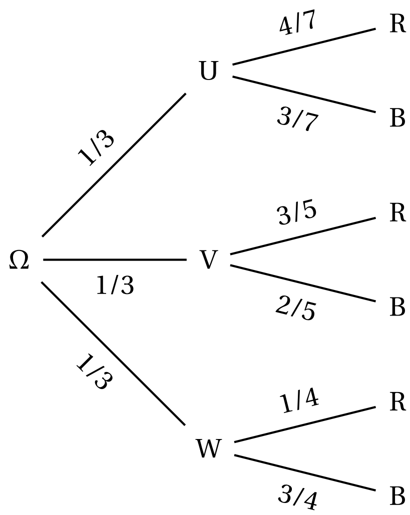


U	V	W
(4 rouges)	(3 rouges)	(1 rouge)
(3 bleues)	(2 bleues)	(3 bleues)

On note :

- U l'événement : « l'urne choisie est l'urne U ».
- V l'événement : « l'urne choisie est l'urne V ».
- W l'événement : « l'urne choisie est l'urne W ».
- B l'événement : « la boule tirée est bleue ».

L'arbre pondéré qui schématise le déroulement de l'expérience est le suivant :



MÉTHODE

Un arbre pondéré schématise le déroulement d'une expérience aléatoire.
Il est constitué :

- de nœuds, sur lesquels sont indiqués des événements.
- de branches, auxquelles sont affectées des probabilités.
- de chemins que l'on assimile à des intersections d'événements.

EXEMPLE

- Urnes U, V et W

La probabilité d'une intersection d'événements correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités affectées à chaque branche de ce chemin.
Par exemple, par le chemin du haut :

$$p(\mathrm{U} \cap \mathrm{R}) = p(\mathrm{U}) \times p_{\mathrm{U}}(\mathrm{R}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$$

On retrouve la formule du **COROLLAIRE** de la **DÉFINITION** d'une probabilité conditionnelle.

La somme des probabilités affectées aux branches d'un même nœud est égale à 1.
Par exemple, depuis le nœud Ω :

$$p(\mathrm{U}) + p(\mathrm{V}) + p(\mathrm{W}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

On dit que les événements incompatibles deux à deux U, V et W forment une *partition de l'univers*.

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à l'événement.
Par exemple :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{R}) &= p(\mathrm{U} \cap \mathrm{R}) + p(\mathrm{V} \cap \mathrm{R}) + p(\mathrm{W} \cap \mathrm{R}) \\ &= p(\mathrm{U}) \times p_{\mathrm{U}}(\mathrm{R}) + p(\mathrm{V}) \times p_{\mathrm{V}}(\mathrm{R}) + p(\mathrm{W}) \times p_{\mathrm{W}}(\mathrm{R}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{199}{420} \end{aligned}$$

La dernière formule s'appelle la *formule des probabilités totales*.

§ 2. Indépendance

a. Indépendance de deux événements

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur un univers Ω, et un événement A tel que $p(\mathrm{A}) \neq 0$.
On dit qu'un événement B est *indépendant* de l'événement A lorsque :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$$

EXEMPLE

- On lance un dé cubique non pipé numéroté de 1 à 6 et on note le numéro obtenu.
  Soit A l'événement : « le chiffre obtenu est un multiple de 3 ».
  Soit B l'événement : « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 4 ».
  On a $p(\mathrm{B}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ car parmi les six numéros, il y a trois numéros supérieurs ou égaux à 4.
  On a $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}$ car parmi les deux multiples de 3, il y a un numéro supérieur ou égal à 4.
  Comme $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$, alors l'événement B est indépendant de l'événement A.

PROPRIÉTÉ

Dans les conditions précédentes et si $p(\mathrm{B}) \neq 0$, alors :

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A})$$

De sorte que l'événement A est indépendant de l'événement B.

DÉFINITION

Dans les conditions précédentes, on dit que les événements A et B sont deux *événements indépendants* et on a :

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$$

b. Expériences aléatoires indépendantes

DÉFINITION

On dit que deux expériences aléatoires successives sont des *expériences aléatoires indépendantes* lorsque le résultat de l'une des expériences ne dépend pas du résultat de l'autre expérience.

MÉTHODE

Dans le cas où les expériences aléatoires successives sont indépendantes, on admettra que la probabilité d'une liste d'issues pour la méga expérience est égale au produit des probabilités de chaque issue pour chaque expérience.

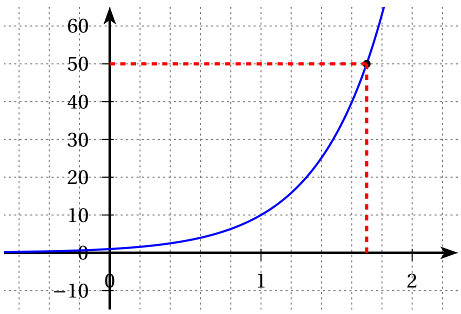
CHAPITRE 5

FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

§ 1. Fonction logarithme décimal

a. Résolution graphique d'une équation du type $10^x = b$

EXEMPLE



Graphiquement, l'unique solution de l'équation $10^x = 50$ est environ égale à 1,7.

b. Logarithme décimal

DÉFINITION

Soit b un réel strictement positif.
Le *logarithme décimal* de b, noté $\log(b)$, est l'unique réel x tel que $10^x = b$.

EXEMPLE

- $\log(1) = 0$
- $\log(50) \simeq 1{,}69$
- $\log(100) = 2$
- $\log(1\,000\,000) = 6$

c. Fonction logarithme décimal

DÉFINITION

La fonction qui à tout réel $b > 0$ associe son logarithme décimal $\log(b)$ s'appelle la *fonction logarithme décimal*.
On note :

$$\begin{aligned} \log : \;]0\,;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ b &\mapsto \log(b) \end{aligned}$$

d. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

COROLLAIRE

Soit $b > 0$.

- Si $b > 1$, alors $\log(b) > 0$.
- Si $b < 1$, alors $\log(b) < 0$.

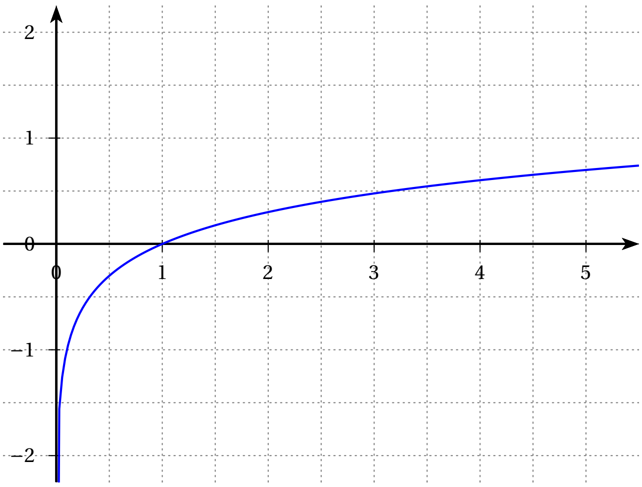
REMARQUE

La croissance de la fonction logarithme décimal est extrêmement lente.

e. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

La représentation graphique de la fonction logarithme décimal est une *courbe logarithmique* qui passe par le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.



§ 2. Propriétés algébriques

a. Propriétés de la fonction logarithme décimal

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels $a > 0$ et $a > 0$, et pour tout entier naturel n :

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
- $\log(a^n) = n\log(a)$

REMARQUE

Cette **PROPRIÉTÉ** sert à simplifier des expressions algébriques ou à résoudre des équations et des inéquations.

b. Résolution d'une équation du type $a^x = b$

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels strictement positifs, avec $a \neq 1$.

L'unique solution de l'équation $a^x = b$ est le réel x donné par :

$$x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

COROLLAIRE

Soient a et b deux réels strictement positifs, avec $a \neq 1$.

- Si $a > 1$, alors : $a^x > b \Leftrightarrow x > \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$.
- Si $a < 1$, alors : $a^x > b \Leftrightarrow x < \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$.

EXERCICE

Un litre de vinaigre réduit de 40 % chaque minute.

A partir de combien de temps le vinaigre a-t-il réduit d'au moins 90 % ?

SOLUTION

Soit $f(x)$ la quantité de vinaigre, en litre, au bout de x minutes.

On a : $f(x) = 0{,}60^x$.

On cherche la plus petite valeur de x telle que $f(x) \leqslant 0{,}10$.

Par équivalences successives : $f(x) \leqslant 0{,}10 \Leftrightarrow 0{,}60^x \leqslant 0{,}10 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\log(0{,}10)}{\log(0{,}60)}$.

Or : $\dfrac{\log(0{,}10)}{\log(0{,}60)} \simeq 4{,}51$.

Par conséquent, la quantité de vinaigre a réduit d'au moins 90 % après un peu plus de 4 minutes et 30 secondes.

CHAPITRE 6

SÉRIES STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

§ 1. Séries statistiques à deux variables

a. Série statistique double

DÉFINITION

Une *série statistique double* est le résultat de l'étude statistique de deux variables X et Y.
On note x_i les valeurs de la variable X et y_i les valeurs correspondantes de la variable Y.

EXEMPLE

- Burgers

  Le tableau suivant présente l'évolution de la consommation de burgers, en milliard, par les français entre 2012 et 2015 :

Année	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année x_i	0	1	2	3
Nombre de burgers consommés y_i	0,92	0,97	1,07	1,19

Les variables X et Y sont le rang de l'année et le nombre de burgers consommés.

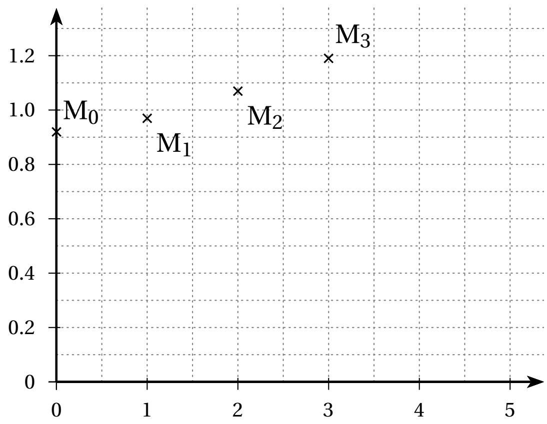
b. Nuage de points

DÉFINITION

Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est appelé le *nuage de points* associé à la série statistique à deux variables X et Y.

EXEMPLE

- Burgers



§ 2. Ajustements affines

a. Point moyen

DÉFINITION

On note $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes respectives des valeurs des variables X et Y.
Le point G de coordonnées $\left(\overline{x}\ ;\ \overline{y}\right)$ est appelé le *point moyen* du nuage de points associé à la série statistique à deux variables X et Y.

EXEMPLE

- Burger
  On a : $\overline{x} = \dfrac{0+1+2+3}{4} = 1{,}5$ et $\overline{y} = \dfrac{0{,}92+0{,}97+1{,}07+1{,}19}{4} = 1{,}037\,5$.
  Le point moyen G est le point de coordonnées $(1{,}5\ ;\ 1{,}037\,5)$.

b. Ajustement affine

DÉFINITION

Lorsque le nuage de points d'une série statistique double a une forme « allongée », on peut tracer une droite (ou plusieurs) qui passe « le plus près possible » des points du nuage.
On dit qu'une telle droite réalise un *ajustement affine* du nuage de points.

PROPRIÉTÉ

Il existe une unique droite passant par le point moyen du nuage et qui minimise la somme des carrés des « écarts verticaux » des points du nuage à cette droite.
Cette droite est appelée la droite d'*ajustement affine par la méthode des moindres carrés* ou la *droite de régression de y en x*.

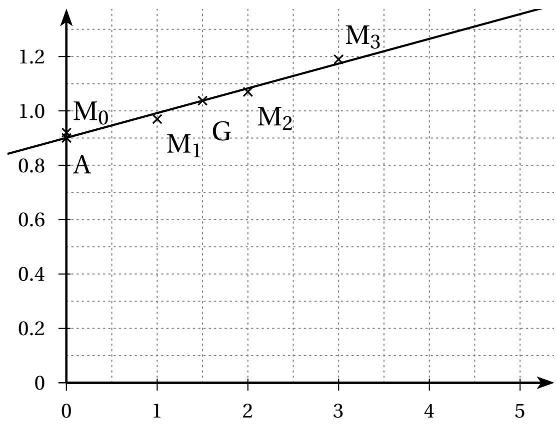
EXEMPLE

- Burgers

  Le nuage de points de la série statistique à deux variables X et Y a une forme « allongée » donc on peut réaliser un ajustement affine du nuage.

  On choisit la droite (d) de régression de y en x et à la calculatrice, on obtient l'équation : $y = 0{,}091x + 0{,}901$.

  La droite (d) passe par les points A(0 ; 0,901) et G(1,5 ; 1,037 5).



c. Estimations à l'aide d'un ajustement affine

EXERCICE

En utilisant la droite de régression (d) :

1. Prévoir le nombre de burgers consommés par les français en 2020.
2. Prévoir en quelle année les français consommeront 2 milliards de burgers.

SOLUTION

1. En 2020, $x = 8$ et $y = 0{,}091 \times 8 + 0{,}901 = 1{,}629$.

   En 2020, les français consommeront 1 milliard 629 millions de burgers.
2. On a par équivalences successives :

$$y = 2 \Leftrightarrow 0{,}091x + 0{,}901 = 2 \Leftrightarrow 0{,}091x = 1{,}099 \Leftrightarrow x \simeq 12$$

   Lorsque $x = 12$, c'est à dire en 2024, les français consommeront 2 milliards de burgers.