VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI BINOMIALE

EXERCICE 1

Les gains possibles sont +2 €; +3 €; +5 €. Autrement dit : $X(\Omega) = \{ 2 ; 3 ; 5 \}$.

EXERCICE 2

1. On peut tirer de 0 à 3 boules rouges donc : $X(\Omega) = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 \}$.
2. L'événement $\{ X = 2 \}$ est l'événement : « Le nombre de boules rouges est égal à 2 ».
3. L'événement $\{ X = 3 \}$ est l'événement : « Le nombre de boules rouges est égal à 3 ».

EXERCICE 3

1. L'événement $\{ X = 1 \}$ est réalisé lorsque l'on n'obtient pas la face numérotée « 3 ».
   On a : $p(X = 1) = \frac{5}{6}$.
2. L'événement $\{ X = 5 \}$ est réalisé lorsque l'on obtient la face numérotée « 3 ».
   On a : $p(X = 5) = \frac{1}{6}$.

EXERCICE 4

1. On a : $p(X = 1) = 0{,}3$.
2. On a : $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}45 + 0{,}3 = 0{,}75$.
3. On a : $p = 1 - 0{,}45 - 0{,}3 - 0{,}15 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.
4. On a : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 0{,}45 \times 0 + 0{,}3 \times 1 + 0{,}15 \times 2 + 0{,}1 \times 3 = 0{,}9$.
   En moyenne, le concessionnaire vend 0,9 voiture par jour.

EXERCICE 5

1. Les issues possibles de l'expérience sont tous les couples de deux nombres que l'on peut obtenir avec les nombres 2 et 3.
   Par conséquent : $\Omega = \{ (2 ; 2) ; (2 ; 3) ; (3 ; 2) ; (3 ; 3) \}$.
   On a : $2 \times 2 = 4$; $2 \times 3 = 6$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 3 = 9$.
   Par conséquent : $X(\Omega) = \{ 4 ; 6 ; 9 \}$.
2. L'événement $\{ X = 9 \}$ est l'événement : « Le produit des deux nombres est égal à 9 ».
   On a : $p(X = 9) = \frac{1}{4}$.
3. L'événement $\{ X < 8 \}$ est l'événement : « Le produit des deux nombres est inférieur à 8 ».
   On a : $p(X < 8) = p(X = 4) + p(X = 6) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 6

1. On a : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 = 0{,}4 \times 2 + 0{,}6 \times 5 = 3{,}8$.

   On a : $V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 - E(X)^2 = 0{,}4 \times 2^2 + 0{,}6 \times 5^2 - 3{,}8^2 = 2{,}16$.

   On a : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}16} \simeq 1{,}47$.

2. On a : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 = 0{,}6 \times 0 + 0{,}4 \times 1 = 0{,}4$.

   On a : $V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 - E(X)^2 = 0{,}6 \times 0^2 + 0{,}4 \times 1^2 - 0{,}4^2 = 0{,}24$.

   On a : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}24} \simeq 0{,}49$.

EXERCICE 7

1. On a : $p = 1 - 0{,}13 - 0{,}2 - 0{,}07 - 0{,}3 - 0{,}1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

2. On cherche $p(N \geqslant 3)$.

   On a : $p(N \geqslant 3) = p(N = 3) + p(N = 4) + p(N = 5) = 0{,}07 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}47$.

   La probabilité que l'adolescent achète au moins trois applications est égale à 0,47.

3. On cherche $p(N \leqslant 4)$.

   On a : $p(N \leqslant 4) = 1 - p(N = 5) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

   La probabilité que l'adolescent achète au plus quatre applications est égale à 0,9.

EXERCICE 8

1. On a : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_3 + p_2x_3 + p_4x_4 = 0{,}1 \times 0 + 0{,}2 \times 1 + 0{,}5 \times 2 + 0{,}2 \times 3 = 1{,}8$.

2. En moyenne, un étudiant se connecte 1,8 fois par jour à l'EPI.

EXERCICE 9

1. On a : $p(G = 3) = p(\text{PILE}) = 0{,}4$ et $p(G = -2) = p(\text{FACE}) = 0{,}6$.

Valeur x_i	3	-2
Probabilité $p(G = x_i)$	0,4	0,6

2. On a : $E(G) = p_1x_1 + p_2x_2 = 0{,}4 \times 3 + 0{,}6 \times (-2) = 0$.

3. Le jeu est équitable car $E(G) = 0$.

EXERCICE 10

1. Faire un enfant constitue une épreuve de Bernoulli.

   Dans le contexte de l'exercice, le succès S est l'événement : « avoir un garçon » et sa probabilité est : $p = 0{,}51$.

   Faire trois enfants consiste à répéter trois fois et de manière indépendante cette même épreuve de Bernoulli.

   Faire trois enfants est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}51$.

   Le nombre de garçons X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}51$.

2. On cherche $p(X = 1)$.

On a : $p(X = 1) = p(\text{GFF}) + p(\text{FGF}) + p(\text{FFG}) = 3 \times 0{,}51 \times 0{,}49 \times 0{,}49 \simeq 0{,}367\,4$.

La probabilité que cette famille ait exactement un garçon est environ égale à 36,74 %.

3. On cherche $p(X \geqslant 1)$.

On a : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(\text{FFF}) = 1 - 0{,}49 \times 0{,}49 \times 0{,}49 \simeq 0{,}882\,4$.

La probabilité que cette famille ait au moins un garçon est environ égale à 88,24 %.

4. On rencontre ensuite au hasard et de manière indépendante 10 familles de trois enfants.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de familles ayant au moins un garçon.

a. Rencontrer une famille de trois enfants constitue une épreuve de Bernoulli.

Dans le contexte de l'exercice, le succès S est l'événement : « la famille a au moins un garçon » et sa probabilité est : $p \simeq 0{,}882\,4$.

Rencontrer dix familles de trois enfants consiste à répéter dix fois et de manière indépendante cette même épreuve de Bernoulli.

Rencontrer dix familles est un schéma de Bernoulli de paramètres $p = 0{,}882\,4$ et $n = 10$.

Le nombre de familles ayant au moins un garçon Y suit la loi binomiale de paramètres $p = 0{,}882\,4$ et $n = 10$.

b. On cherche $p(Y = 9)$.

On a : $p(Y = 9) \simeq 10 \times 0{,}882\,4^9 \times 0{,}117\,6 \simeq 0{,}381\,4$.

La probabilité que neuf familles exactement sur les dix aient au moins un garçon est environ égale à 38,14 %.

EXERCICE 11

1. Rencontrer un feu bicolore constitue une épreuve de Bernoulli.

Dans le contexte de l'exercice, le succès S est l'événement : « le feu est vert » et sa probabilité est : $p = \frac{2}{3}$.

Rencontrer six feux bicolores consiste à répéter six fois et de manière indépendante cette même épreuve de Bernoulli.

Rencontrer six feux bicolores est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{2}{3}$.

Le nombre de feux verts rencontrés par l'étudiant X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{2}{3}$.

Valeur x_i	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(X = x_i)$	0,001	0,016	0,082	0,219	0,329	0,263	0,088

2. **a.** A 15 km/h, l'étudiant parcourt 3 km en 12 minutes.

Le nombre de feux rouges est égal à $6 - X$ et chaque feu rouge rallonge le parcours de 1,5 minute.

On a : $T = 12 + 1{,}5 \times (6 - X) = 12 + 9 - 1{,}5X = -1{,}5X + 21$.

b. On a : $E(T) = -1{,}5E(X) + 21 = -1{,}5 \times n \times p + 21 = -1{,}5 \times 6 \times \dfrac{2}{3} + 21 = 15$.

En moyenne, l'étudiant se rend à l'université en 15 minutes.

3. **a.** D'après la question précédente, en partant 17 minutes avant le début d'un cours, l'étudiant peut espérer être à l'heure de 2 minutes en moyenne.
   b. En rencontrant 3 feux rouges, l'étudiant perd 4 minutes et 30 secondes et met 16 minutes 30 secondes pour se rendre à l'Université.
   En rencontrant 4 feux rouges, l'étudiant perd 6 minutes et met 18 minutes pour se rendre à l'Université.
   L'étudiant arrivera en retard s'il rencontre au moins 4 feux rouges c'est à dire s'il rencontre au plus 2 feux verts.
   On a : $p(X \leqslant 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) \simeq 0{,}001 + 0{,}016 + 0{,}082 \simeq 0{,}100$.
   La probabilité pour que l'étudiant arrive en retard est environ égale à 10 %.

EXERCICE 12

Un lièvre et une tortue lancent un dé cubique parfaitement équilibré numéroté de 1 à 6.

- Si le dé tombe sur 6, le lièvre gagne et la partie s'arrête ;
- Si le dé tombe sur un autre numéro, la tortue avance d'une case. La tortue gagne et la partie s'arrête si elle parvient à avancer de n cases.

On note $p_n(T)$ la probabilité que la tortue gagne et $p_n(L)$ la probabilité que le lièvre gagne.

Partie A. Étude du cas $n = 4$

1. **a.** Montrer que $p_4(T) \simeq 0.48$.
   b. A quel animal le jeu est-il favorable ?
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un vainqueur.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Combien de lancers faut-il en moyenne pour obtenir un vainqueur ?
3. Les deux animaux jouent 10 parties indépendantes.
   a. Quelle est la probabilité que la tortue gagne exactement 5 fois ?
   b. Quelle est la probabilité que la tortue gagne au moins 2 fois ?

Partie B. Cas général

1. **a.** Calculer $p_n(T)$ en fonction de n.
   b. Déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable à la tortue.
2. **a.** Calculer l'espérance du nombre de parties remportées par la tortue dans une série de 10 parties jouées.
   b. Pour quelles valeurs de n la tortue peut-elle espérer gagner au moins 9 parties sur 10 ?

EXERCICE 13

Combien de fois faut-il jeter une pièce de monnaie parfaitement équilibrée pour obtenir au moins une fois la face PILE avec une probabilité supérieure à 0,99 ?