SUITES

EXERCICE 1

1. On passe d'un terme au suivant en ajoutant 4.

   $u_0 = -3$ $u_1 = 1$ $u_2 = 5$ $u_3 = 9$ $u_4 = 13$ $u_5 = 17$ $u_6 = 21$

2. On passe d'un terme au suivant en multipliant par 3.

   $u_0 = 1$ $u_1 = 3$ $u_2 = 9$ $u_3 = 27$ $u_4 = 81$ $u_5 = 243$ $u_6 = 729$

3. On passe d'un terme au suivant en augmentant l'écart précédent de 2.

   $u_0 = 7$ $u_1 = 12$ $u_2 = 19$ $u_3 = 28$ $u_4 = 39$ $u_5 = 52$ $u_6 = 67$

4. On passe d'un terme au suivant en ajoutant 2 au numérateur et 3 au dénominateur.

   $u_0 = \dfrac{1}{2}$ $u_1 = \dfrac{3}{5}$ $u_2 = \dfrac{5}{8}$ $u_3 = \dfrac{7}{11}$ $u_4 = \dfrac{9}{14}$ $u_5 = \dfrac{11}{17}$ $u_6 = \dfrac{13}{20}$

EXERCICE 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + n \times r = 7 + n \times (-2) = -2n + 7$.

   On a : $u_{10} = -2 \times 10 + 7 = -13$ et $u_{100} = -2 \times 100 + 7 = -193$.

2. On a : $v_6 = v_2 + (6-2) \times r$. D'où : $r = \dfrac{v_6 - v_2}{6-2} = \dfrac{9-7}{6-2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

   On a : $v_0 = v_2 - 2 \times r = 7 - 2 \times 0{,}5 = 6$.

EXERCICE 3

1. La suite 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ne peut pas être arithmétique car :

   $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ $u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$

2. La suite 28 ; 21 ; 14 ; 7 ; 0 peut être arithmétique car :

   $u_1 - u_0 = 21 - 28 = -7$ $u_2 - u_1 = 14 - 21 = -7$

   $u_3 - u_2 = 7 - 14 = -7$ $u_4 - u_3 = 0 - 7 = -7$

3. La suite 5,2 ; 5,6 ; 6 ; 6,4 ; 6,8 peut être arithmétique car :

   $u_1 - u_0 = 5{,}6 - 5{,}2 = 0{,}4$ $u_2 - u_1 = 6 - 5{,}6 = 0{,}4$

   $u_3 - u_2 = 6{,}4 - 6 = 0{,}4$ $u_4 - u_3 = 6{,}8 - 6{,}4 = 0{,}4$

EXERCICE 4

1. Par définition des intérêts produits, on a : $I = 0{,}06 \times 1\,250 = 75$.
2. On a : $C_1 = C_0 + I = 1\,250 + 75 = 1\,325$.

   On a : $C_2 = C_1 + I = 1\,325 + 75 = 1\,400$.

   On a : $C_3 = C_2 + I = 1\,400 + 75 = 1\,475$.
3. Chaque année, la somme disponible augmente de 75 €.

   Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_{n+1} = C_n + 75$.

   Par définition, la suite (C_n) est une suite arithmétique de premier terme $C_0 = 1\,250$ et de raison I.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_n = C_0 + n \times I = 1\,250 + n \times 75 = 75n + 1\,250$.
5. Pour savoir au bout de combien d'années la somme disponible dépasse 2 000 €, on résout l'inéquation : $C_n > 2\,000$.

   On a : $C_n > 2\,000 \Leftrightarrow 75n + 1\,250 > 2\,000 \Leftrightarrow 75n > 2\,000 - 1\,250 \Leftrightarrow 75n > 750 \Leftrightarrow n > 10$.

   La somme disponible dépasse 2 000 € au bout de 11 ans.

EXERCICE 5

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = q \times u_n = 1{,}5 \times u_n$.

   On a : $u_1 = 1{,}5 \times u_0 = 1{,}5 \times 8 = 12$ et $u_2 = 1{,}5 \times u_1 = 1{,}5 \times 12 = 18$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = q^n \times v_0 = 2^n \times 3$.

   On a : $v_5 = 2^5 \times 3 = 96$ et $v_{10} = 2^{10} \times 3 = 3\,072$.
3. On a : $w_{10} = q^{10-7} \times w_7 = q^3 \times w_7$. D'où : $q^3 = \dfrac{w_{10}}{w_7} = \dfrac{54}{2} = 27$ et $q = 27^{1/3} = 3$.

EXERCICE 6

1. Chaque année, le capital augmente de 3,5 % donc il est multiplié par 1,035.

   Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_{n+1} = 1{,}035 \times C_n$.

   Par définition, la suite (C_n) est une suite géométrique de raison 1,035.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_n = q^n \times C_0 = 1{,}035^n \times C_0$.
3.
   a. Au bout de 1 an, on a : $C_1 = 1{,}035^1 \times C_0 = 1{,}035^1 \times 10\,000 = 10\,350$ €.

   b. Au bout de 2 ans, on a : $C_2 = 1{,}035^2 \times C_0 = 1{,}035^2 \times 10\,000 = 10\,712{,}25$ €.

   c. Au bout de 3 ans, on a : $C_3 = 1{,}035^3 \times C_0 = 1{,}035^3 \times 10\,000 \simeq 11\,087{,}18$ €.

   d. Au bout de 10 ans, on a : $C_{10} = 1{,}035^{10} \times C_0 = 1{,}035^{10} \times 10\,000 \simeq 14\,105{,}99$ €.
4. On cherche C_0 sachant que $C_{10} = 20\,000$. On a : $C_0 = \dfrac{C_{10}}{q^{10}} = \dfrac{20\,000}{1{,}035^{10}} \simeq 14\,178{,}38$.

   La valeur actuelle d'un capital de 20 000 € dans 10 ans est environ égale à 14 178,38 €.
5. On a : $1 + t_s = (1 + t_a)^{1/2}$. D'où : $t_s = (1 + t_a)^{1/2} - 1 \simeq 0{,}017\,3$.

   Le taux semestriel t_s équivalent au taux annuel t_a est environ égal à 1,73 %.
6.
   a. Au bout de 6 mois, on a : $C = (1 + t_a) \times C_0 \simeq 1{,}017\,3 \times 10\,000 \simeq 10\,173{,}50$ €.

   b. Au bout de 18 mois, on a : $C = (1 + t_a)^3 \times C_0 \simeq 1{,}017\,3^3 \times 10\,000 \simeq 10\,529{,}57$ €.

EXERCICE 7

L'entreprise Iron SA exploite un filon de minerai de fer depuis 1950.

La première année d'extraction l'entreprise a récupéré 20 000 tonnes de fer. Cependant depuis 1950, en raison de difficultés croissantes d'extraction, de l'appauvrissement du filon, les quantités extraites diminuent de 1 % par an.

On appelle T_n le nombre de tonnes extraites l'année $(1950 + n)$. On a donc $T_0 = 20\,000$.

Les résultats seront arrondis à la tonne.

1. Justifier que $T_1 = 19\,800$ puis calculer T_2 et T_3.
2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
3. Quelle est la nature de la suite (T_n) ? En déduire l'expression de T_n en fonction de n.
4. Quelle est la quantité extraite en 2008 ?
5. On admet que pour tout réel $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

   Montrer que la quantité totale extraite entre l'année 1950 et l'année $(1950 + n)$ est :

$$S_n = 2\,000\,000 \times \left(1 - 0{,}99^{n+1}\right)$$

6. En 1950, les géologues estimaient que ce filon recelait 1 000 000 tonnes de métal. En quelle année, théoriquement, le filon sera-t-il épuisé ?

EXERCICE 8

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A. LES ÉCONOMIES

Afin de se constituer un capital, un épargnant place 1 000 euros sur un compte non rémunéré et, chaque mois, verse 75 euros sur ce compte.

On note u_n le montant en euros du capital accumulé au bout de n mois. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer la nature de la suite (u_n) en justifiant la réponse.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   Au bout de combien de temps le capital accumulé est-il supérieur à 3 500 euros ? Justifier la réponse.

PARTIE B. LES DÉPENSES

Cet épargnant doit surveiller ses dépenses. En janvier 2014 il a dépensé 660 € et, jusqu'à présent, ses dépenses ont augmenté chaque mois de 4 %. On suppose que cette évolution va se poursuivre à l'avenir.

Cette évolution conduit à modéliser le montant en euros des dépenses mensuelles au cours du n-ième mois après janvier 2014 par le terme v_n d'une suite géométrique. Ainsi $v_0 = 660$.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que $v_1 = 1{,}04v_0$. Calculer v_3 et interpréter le résultat.
2. Calculer le montant des dépenses au mois de décembre 2014.
3. Selon ce modèle, quand l'épargnant devrait-il doubler ses dépenses par rapport à janvier 2014 ?

EXERCICE 9

Par définition, la valeur actuelle E d'une suite de n annuités constantes de versement annuel a au taux d'intérêt annuel t est définie par la somme des valeurs actuelles de chaque versement.

Autrement dit :

$$\mathrm{E} = \frac{a}{1+t} + \ldots + \frac{a}{(1+t)^n}$$

Avec les notations précédentes, on peut montrer que :

$$\mathrm{E} = a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Réciproquement, le versement annuel a d'un emprunt E à n annuités constantes au taux d'intérêt annuel t est donné par :

$$a = \mathrm{E} \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

1. Une entreprise souhaite anticiper un remboursement de matériel décomposé en 5 versements de 2 000 euros au taux d'intérêt annuel de 6 %.
   a. Calculer le montant du remboursement anticipé.
   b. Calculer l'économie réalisée.
2. On emprunte 200 000 euros pendant 20 ans au taux d'intérêt annuel de 4 %.
   a. Calculer le montant du versement annuel.
   b. Calculer le coût total du crédit.