PROBABILITÉS

EXERCICE 1

- Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 valets, donc : $p(\mathrm{A}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.
  La probabilité que la carte soit un valet est égale à $\frac{1}{8}$.
- Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 piques, donc : $p(\mathrm{B}) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.
  La probabilité que la carte soit un pique est égale à $\frac{1}{4}$.
- Dans un jeu de 32 cartes, il y a 1 valet de pique, donc : $p(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{32}$.
  La probabilité que la carte soit un valet de pique est égale à $\frac{1}{32}$.
- On a : $p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{C}) = \dfrac{4}{32} + \dfrac{8}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$.
  La probabilité que la carte soit un valet ou un pique est égale à $\frac{11}{32}$.
- On a : $p(\mathrm{E}) = 1 - p(\mathrm{D}) = 1 - \dfrac{11}{32} = \dfrac{21}{32}$.
  La probabilité que la carte ne soit ni un valet ni un pique est égale à $\frac{21}{32}$.
- On a : $p(\mathrm{F}) = p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{C}) = \dfrac{8}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{7}{32}$.
  La probabilité que la carte ne soit pas un valet mais un pique est égale à $\frac{7}{32}$.

EXERCICE 2

Lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce supposée équilibrée, les 4 issues possibles sont les couples : (PILE ; PILE), (PILE ; FACE), (FACE ; PILE) et (FACE ; FACE).

1. La probabilité d'obtenir deux fois « PILE » est : $p_1 = \dfrac{1}{4}$.
2. La probabilité d'obtenir au moins une fois « FACE » est : $p_2 = 1 - p_1 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 3

On note P l'événement : « La personne s'intéresse à la pêche ».
On note L l'événement : « La personne s'intéresse à la lecture ».

1. On cherche $p(\mathrm{P} \cup \mathrm{L})$.
   On a : $p(\mathrm{P} \cup \mathrm{L}) = p(\mathrm{P}) + p(\mathrm{L}) - p(\mathrm{P} \cap \mathrm{L}) = \dfrac{10}{20} + \dfrac{8}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$.
   La probabilité que la personne s'intéresse à la pêche ou à la lecture est égale à $\frac{3}{4}$.
2. On cherche $1 - p(\mathrm{P} \cup \mathrm{L})$.
   On a : $1 - p(\mathrm{P} \cup \mathrm{L}) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.
   La probabilité que la personne ne s'intéresse ni à la pêche ni à la lecture est égale à $\frac{1}{4}$.

EXERCICE 4

1. Les produits possibles sont obtenus par la table de multiplication :

$\times$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

L'univers associé est :

$$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;8\,;9\,;10\,;12\,;15\,;16\,;18\,;20\,;24\,;25\,;30\,;36\}$$

2. On note E l'événement : « obtenir 6 ».

   Il y a quatre cas favorables obtenus par les produits : $1 \times 6\,;\ 2 \times 3\,;\ 3 \times 2\,;\ 6 \times 1$.

   On a : $p(\text{E}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

3. On note F l'événement : « obtenir 16 ».

   Il y a un cas favorable obtenus par le produit : 4×4.

   On a : $p(\text{F}) = \dfrac{1}{36}$.

4. On note G l'événement : « obtenir 20 ».

   Il y a deux cas favorables obtenus par les produits : $4 \times 5\,;\ 5 \times 4$.

   On a : $p(\text{G}) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

EXERCICE 5

Lorsqu'on prend en photo trois animaux côte à côte parmi les cinq animaux, il y a 60 triplets possibles en tenant compte de l'ordre :

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

Il y a 10 combinaisons possibles sans tenir compte de l'ordre :

$$\{D1\,;\,D2\,;\,C1\}\,;\,\{D1\,;\,D2\,;\,C2\}\,;\,\{D1\,;\,D2\,;\,L\}\,;\,\{D1\,;\,C1\,;\,C2\}\,;\,\{D1\,;\,C1\,;\,L\}\,;\,\{D1\,;\,C2\,;\,L\}$$
$$\{D2\,;\,C1\,;\,C2\}\,;\,\{D2\,;\,C1\,;\,L\}\,;\,\{D2\,;\,C2\,;\,L\}\,;\,\{C1\,;\,C2\,;\,L\}$$

Le visiteur aura photographié 4 bosses par les 3 combinaisons :

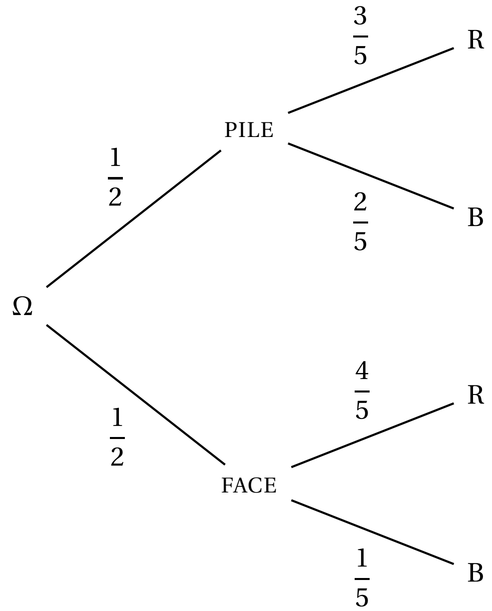
$$\{D1\,;\,D2\,;\,C1\}\,;\,\{D1\,;\,D2\,;\,C2\}\,;\,\{C1\,;\,C2\,;\,L\}$$

La probabilité que le visiteur ait photographié quatre bosses est : $p = \dfrac{3}{10}$.

EXERCICE 6

Le joueur gagne par deux manières disjointes :

- En ayant obtenu PILE et une boule blanche avec une probabilité $p_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$.
- En ayant obtenu FACE et une boule blanche avec une probabilité $p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.



La probabilité que le joueur gagne est : $p = p_1 + p_2 = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$.

EXERCICE 7

1. Tableau complet :

Test \ État	Malade	Bien-portant	Total
Test positif	851	582	1 433
Test négatif	49	28 518	28 567
Total	900	29 100	30 000

2. a. L'événement $\mathrm{P} \cap \mathrm{M}$ est : « Le test est positif pour l'individu choisi **et** il est malade ».

b. On a : $p(\mathrm{P} \cap \mathrm{M}) = \frac{851}{30\,000} \simeq 0{,}028$.

c. On cherche $p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{P})$.

On a : $p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{P}) = \frac{582}{29\,100} = 0{,}02$.

La probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade est égale à 0,02.

d. On cherche $p_{\mathrm{P}}(\mathrm{M})$.

On a : $p_{\mathrm{P}}(\mathrm{M}) = \frac{851}{1\,433} \simeq 0{,}594$.

La probabilité que l'individu soit malade sachant que le test est positif est environ égale à 0,594.

EXERCICE 8

1. On a : 30 % de 500 = $0{,}30 \times 500 = 150$.

   Il y a 150 joueurs de dames dans l'association.

   On a : $\dfrac{1}{5}$ de $150 = \dfrac{150}{5} = 30$.

   Il y a 30 juniors parmi les joueurs de dames.

   On a : 60 % de 500 = $0{,}60 \times 500 = 300$.

   Il y a 300 joueurs d'échecs dans l'association.

   On a : 70 % de 300 = $0{,}70 \times 300 = 210$.

   Il y a 210 adultes parmi les joueurs d'échecs.

   Tableau complet :

Activité / Age	Dames	Echecs	Go	Total
Juniors	30	50	10	90
Adultes	80	210	20	310
Séniors	40	40	20	100
Total	150	300	50	500

2. **a.** Il y a 310 adultes parmi les 500 membres donc :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{310}{500} = \frac{31}{50}$$

Il y a 300 joueurs d'échecs parmi les 500 membres donc :

$$p(\mathrm{E}) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$

b. On a : $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}$: « Le membre est un adulte **et** un joueur d'échecs ».
Il y a 210 adultes joueurs d'échecs parmi les 500 membres donc :

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) = \frac{210}{500} = \frac{21}{50}$$

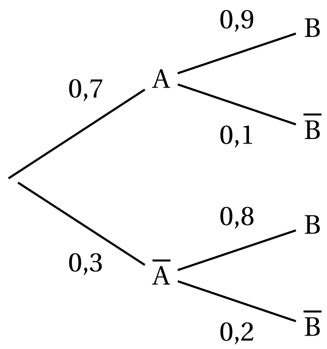
c. On cherche $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{S})$.
Il y a 40 séniors parmi les 150 joueurs de dames donc :

$$p_{\mathrm{D}}(\mathrm{S}) = \frac{40}{150} = \frac{4}{15}$$

d. On cherche la probabilité que le membre soit un junior parmi les joueurs d'échecs.
Il y a 50 juniors parmi les 300 joueurs d'échecs donc :

$$p_{\mathrm{E}}(\mathrm{J}) = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$$

EXERCICE 9



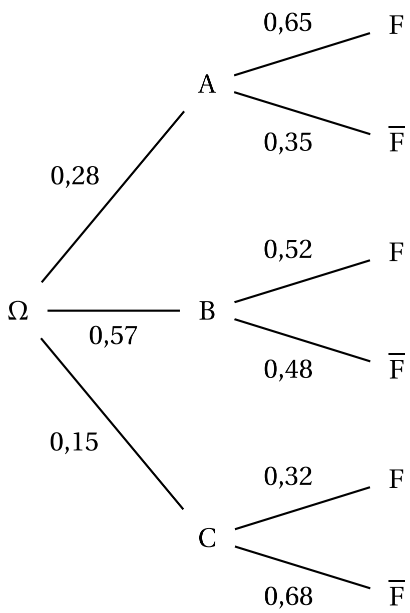
1. Arbre de probabilités complété ci-contre.
2. On a : $p_A(B) = 0{,}9$.
3. On a : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}63$.
4. On a : $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

   On a : $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$.

   D'où : $p(B) = 0{,}63 + 0{,}24 = 0{,}87$.
5. On a : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}63}{0{,}87} \simeq 0{,}724$.

EXERCICE 10

1. Arbre pondéré :



2. On cherche $p(A \cap F)$.

   On a : $p(A \cap F) = p(A) \times p_A(F) = 0{,}28 \times 0{,}65 = 0{,}182$.

   La probabilité que la personne choisie ait fumé avant l'âge de 14 ans et soit un fumeur régulier est égale à 18,2 %.
3. On a :

$$\begin{aligned} p(F) &= p(A \cap F) + p(B \cap F) + p(C \cap F) \\ &= p(A) \times p_A(F) + p(B) \times p_B(F) + p(C) \times p_C(F) \\ &= 0{,}28 \times 0{,}65 + 0{,}57 \times 0{,}52 + 0{,}15 \times 0{,}32 = 0{,}526\,4 \end{aligned}$$

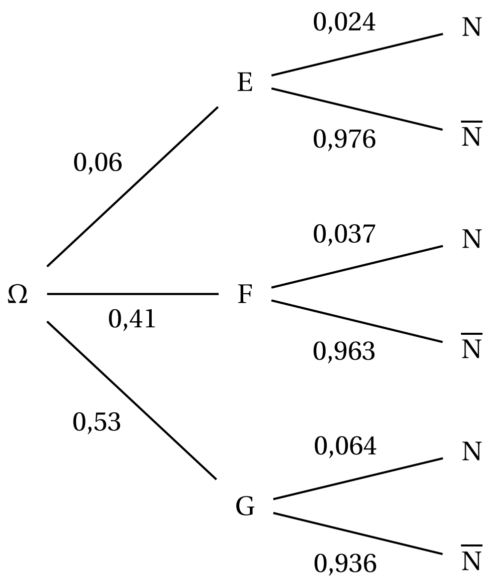
4. On cherche $p_F(A)$.

   On a : $p_F(A) = \dfrac{p(A \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0{,}182}{0{,}526\,4} \simeq 0{,}345\,7$.

   Sachant que la personne choisie est un fumeur régulier, la probabilité qu'il ait fumé sa première cigarette avant l'âge de 14 ans est environ égale à 34,57 %.

EXERCICE 11

1. Arbre de probabilités :



2. On a : $G \cap N$: « La personne est âgée de plus de 65 ans **et** atteinte par une infection nosocomiale ».

   On a : $p(G \cap N) = p(G) \times p_G(N) = 0,53 \times 0,064 \simeq 0,034$.

   La probabilité que la personne soit âgée de plus de 65 ans et atteinte par une infection nosocomiale est environ égale à 0,034.

3. On cherche $p(N)$:

$$\begin{aligned} p(N) &= p(E \cap N) + p(F \cap N) + p(G \cap N) \\ &= p(E) \times p_E(N) + p(F) \times p_F(N) + p(G) \times p_G(N) \\ &= 0,06 \times 0,024 + 0,41 \times 0,037 + 0,53 \times 0,064 = 0,050\,53 \end{aligned}$$

   La probabilité de contracter une infection nosocomiale est bien environ égale à 0,051.

4. On calcule $p_N(G)$.

   On a : $p_N(G) = \dfrac{p(N \cap G)}{p(N)} \simeq \dfrac{0,034}{0,051} \simeq 0,667 \simeq \dfrac{2}{3}$.

   La probabilité qu'un patient victime d'une infection nosocomiale soit âgée de plus de 65 ans est environ égale à deux-tiers.

   Comme $\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$, alors le lecteur de l'enquête a tort.