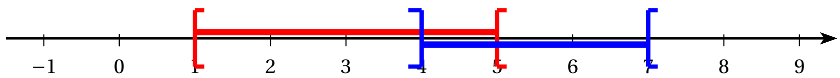
INÉQUATIONS

EXERCICE 1

1.
   - $x \in [1\,;\,2[\;\Leftrightarrow\; 1 \leqslant x < 2$.
   - $x \in]-1\,;\,+\infty[\;\Leftrightarrow\; x > -1$.
   - $x \in]-\infty\,;\,5] \;\Leftrightarrow\; x \leqslant 5$.
2.
   - $x \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; x \in [1\,;\,+\infty[$.
   - $-1 \leqslant x < 5 \;\Leftrightarrow\; x \in [-1\,;\,5[$.
   - $x < 3$ et $x > -4 \;\Leftrightarrow\; x \in]-4\,;\,3[$.

EXERCICE 2

1. $\mathbb{I} = [1\,;\,5[$ et $\mathbb{J} =]4\,;\,7[$:



2. On a : $\mathbb{I} \cap \mathbb{J} =]4\,;\,5[$. C'est l'intervalle des réels « des deux couleurs ».
3. On a : $\mathbb{I} \cup \mathbb{J} = [1\,;\,7[$. C'est l'intervalle des réels « d'au moins une couleur ».

EXERCICE 3

1. $2x-6<7 \;\Leftrightarrow\; 2x<7+6 \;\Leftrightarrow\; 2x<13 \;\Leftrightarrow\; x<\dfrac{13}{2} \;\Leftrightarrow\; x<6{,}5 \;\Leftrightarrow\; x \in]-\infty\,;\,6{,}5[$.
2. $-2x+3 \geqslant 3 \;\Leftrightarrow\; -2x \geqslant 3-3 \;\Leftrightarrow\; -2x \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x \leqslant -\dfrac{0}{2} \;\Leftrightarrow\; x \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x \in]-\infty\,;\,0]$.
3. $3<7x+3 \;\Leftrightarrow\; 3-3<7x \;\Leftrightarrow\; 0<7x \;\Leftrightarrow\; \dfrac{0}{7}<x \;\Leftrightarrow\; 0<x \;\Leftrightarrow\; x \in]0\,;\,+\infty[$.
4. $3x-5 \leqslant x+4 \;\Leftrightarrow\; 3x-x \leqslant 5+4 \;\Leftrightarrow\; 2x \leqslant 9 \;\Leftrightarrow\; x \leqslant \dfrac{9}{2} \;\Leftrightarrow\; x \leqslant 4{,}5 \;\Leftrightarrow\; x \in [-\infty\,;\,4{,}5[$.
5. $3x-5<4x+2 \;\Leftrightarrow\; -5-2<4x-3x \;\Leftrightarrow\; -7<x \;\Leftrightarrow\; x \in]-7\,;\,+\infty[$.
6. $-2x+1 \geqslant x-5 \;\Leftrightarrow\; 1+5 \geqslant x+2x \;\Leftrightarrow\; 6 \geqslant 3x \;\Leftrightarrow\; \dfrac{6}{3} \geqslant x \;\Leftrightarrow\; 2 \geqslant x \;\Leftrightarrow\; x \in]-\infty\,;\,2]$.

EXERCICE 4

1. On a : $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 7x-14=0 \;\Leftrightarrow\; 7x=14 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{14}{7} \;\Leftrightarrow\; x=2$.

   Comme $7>0$, alors :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. On a : $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x+2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$.

Comme $3 > 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. On a : $h(x) = 0 \Leftrightarrow 4-5x = 0 \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$.

Comme $-5 < 0$, alors :

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

EXERCICE 5

1. Soit Δ le discriminant du trinôme $2x^2 - 10x + 8$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 100 - 64 = 36$.

Comme $36 > 0$, alors l'équation $2x^2 - 10x + 8 = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-\sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{10-6}{4} = \frac{4}{4} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10+\sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{10+6}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Comme $2 > 0$, alors :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$2x^2 - 10x + 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $2x^2 - 10x + 8 < 0 \Leftrightarrow x \in]1\,;\,4[$.

2. $4x^2 + 4x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \leqslant 0$.

Comme seul le carré de 0 est négatif ou nul : $2x+1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $4x^2 + 4x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = -0{,}5$.

3. Soit Δ le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 4$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12$.

Comme $-12 < 0$ et $1 > 0$, alors :

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 + 2x + 4$		$+$	

Conclusion : L'inéquation $2x^2 - 10x + 8 < 0$ ne possède pas de solution.

EXERCICE 6

1. On a : $2x+5=0 \Leftrightarrow 2x=-5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$.

   On a : $3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

   Comme $2>0$ et $3>0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. D'après le tableau de signes : $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{1}{3}\right]$.

EXERCICE 7

1. On a : $-x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

   On a : $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

   Comme $-1<0$ et $1>0$, alors :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

2. D'après le tableau de signes : $g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,1] \cup]2\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 8

1. Par le **contrat A** : $0{,}15 \times 1\,000+150=150+150=300$.

   Le montant de la location est égal à 300 euros pour 1 000 kilomètres.

   Par le **contrat B** : $0{,}12 \times 1\,000+200=120+200=320$.

   Le montant de la location est égal à 320 euros pour 1 000 kilomètres.

2. On note $f(x)$ le montant de la location par le **contrat A**. On a : $f(x)=0{,}15x+150$.

   On note $g(x)$ le montant de la location par le **contrat B**. On a : $g(x)=0{,}12x+200$.

3. Il est plus avantageux de choisir le **contrat B** dès lors que $f(x)>g(x)$.

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow 0{,}15x+150>0{,}12x+200 \Leftrightarrow 0{,}15x-0{,}12x>200-150 \Leftrightarrow 0{,}03x>50$$

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow x>\frac{50}{0{,}03} \Leftrightarrow x>\frac{5\,000}{3} \text{ et } 1\,666<\frac{5\,000}{3}<1\,667$$

   Il est plus avantageux de choisir le **contrat B** à partir de 1 667 kilomètres.

EXERCICE 9

1. On a : $25+2\times(40+0{,}20\times 40)=25+2\times 48=25+96=121$.

   Le montant de la facture dans un logement neuf pour 2 h de travail est égal à 121 €.

   On a : $25+0{,}5\times(40+0{,}20\times 40)=25+0{,}5\times 48=25+24=49$.

   Le montant de la facture dans un logement neuf pour 30 min de travail est égal à 49 €.

2. On a : $p(t)=25+t\times(40+0{,}20\times 40)=25+48t$.

   On a : $q(t)=25+t\times(40+0{,}10\times 40)=25+44t$.

3. Pour déterminer le temps de travail pour lequel le prix dans un logement neuf coûte 10 € de plus que dans un logement ancien, on résout l'équation $p(t)=q(t)+10$.

   On a : $p(t)=q(t)+10 \Leftrightarrow 25+48t=25+44t+10 \Leftrightarrow 4t=10 \Leftrightarrow t=2{,}5$.

   Pour 2 heures et 30 minutes de travail, le prix dans un logement neuf coûte 10 € de plus que dans un logement ancien.

   Au delà de 2 heures et 30 minutes de travail, le prix dans un logement neuf coûte plus de 10 € de plus que dans un logement ancien.

   En deçà de 2 heures et 30 minutes de travail, le prix dans un logement neuf coûte moins de 10 € de plus que dans un logement ancien.

EXERCICE 10

1. Puisque le restaurateur propose entre 10 et 120 menus, alors l'expression $B(x)$ est définie sur intervalle $[10\,;\,120]$.

2. Soit Δ le discriminant du trinôme $B(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+60x-1\,000$.

   On a : $\Delta=b^2-4ac=60^2-4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-1\,000)=3\,600-2\,000=1\,600$.

   Comme $\Delta>0$, alors l'équation $B(x)=0$ possède deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-60-\sqrt{1\,600}}{2\times-\frac{1}{2}}=\frac{-60-40}{-1}=\frac{-100}{-1}=100$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-60+\sqrt{1\,600}}{2\times-\frac{1}{2}}=\frac{-60+40}{-1}=\frac{-20}{-1}=20$$

   Comme $-\dfrac{1}{2}<0$, alors :

x	10		20		100		120
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   D'après le tableau de signes de $B(x)$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $B(x)\geqslant 0$ est l'intervalle $[20\,;\,100]$.

3. D'après ce qui précède, le restaurateur réalise un bénéfice positif en proposant entre 21 et 99 menus.