FONCTIONS USUELLES

EXERCICE 1

1. $f(x) = -2x+3$.

   Le coefficient directeur est $a = -2$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 3$.
2. $f(x) = -3-4x = -4x-3$.

   Le coefficient directeur est $a = -4$ et l'ordonnée à l'origine est $b = -3$.
3. $f(x) = -2 = 0x-2$.

   Le coefficient directeur est $a = 0$ et l'ordonnée à l'origine est $b = -2$.
4. $f(x) = 3x = 3x+0$.

   Le coefficient directeur est $a = 3$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 0$.
5. $f(x) = x+4 = 1x+4$.

   Le coefficient directeur est $a = 1$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 4$.
6. $f(x) = 2-x = -1x+2$.

   Le coefficient directeur est $a = -1$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 2$.

EXERCICE 2

1. $f(x) = 3x+\dfrac{1}{2}$.

   Puisque $a = 3$ et $3 > 0$, alors la fonction affine f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = -\dfrac{1}{6}x$.

   Puisque $a = -\dfrac{1}{6}$ et $-\dfrac{1}{6} < 0$, alors la fonction affine f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{6}$.

   Puisque $a = 0$, alors la fonction affine f est constante sur $\mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}$.

   Puisque $a = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{6} > 0$, alors la fonction affine f est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $f(x) = 6-\dfrac{1}{6}x$.

   Puisque $a = -\dfrac{1}{6}$ et $-\dfrac{1}{6} < 0$, alors la fonction affine f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = -\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}x$.

   Puisque $a = \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{6} > 0$, alors la fonction affine f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. $f(x) = 2x - 5$.

x	0	3
$f(x)$	-5	1

La courbe de f est la droite passant par les points A(0 ; −5) et B(3 ; 1).

2. $f(x) = -x + 3$.

x	0	5
$f(x)$	3	-2

La courbe de f est la droite passant par les points C(0 ; 3) et D(5 ; −2).

3. $f(x) = 5x$.

x	0	1
$f(x)$	0	5

La courbe de f est la droite passant par l'origine et par le point E(1 ; 5).

4. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

x	0	4
$f(x)$	1	3

La courbe de f est la droite passant par les points F(0 ; 1) et G(4 ; 3).

5. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$.

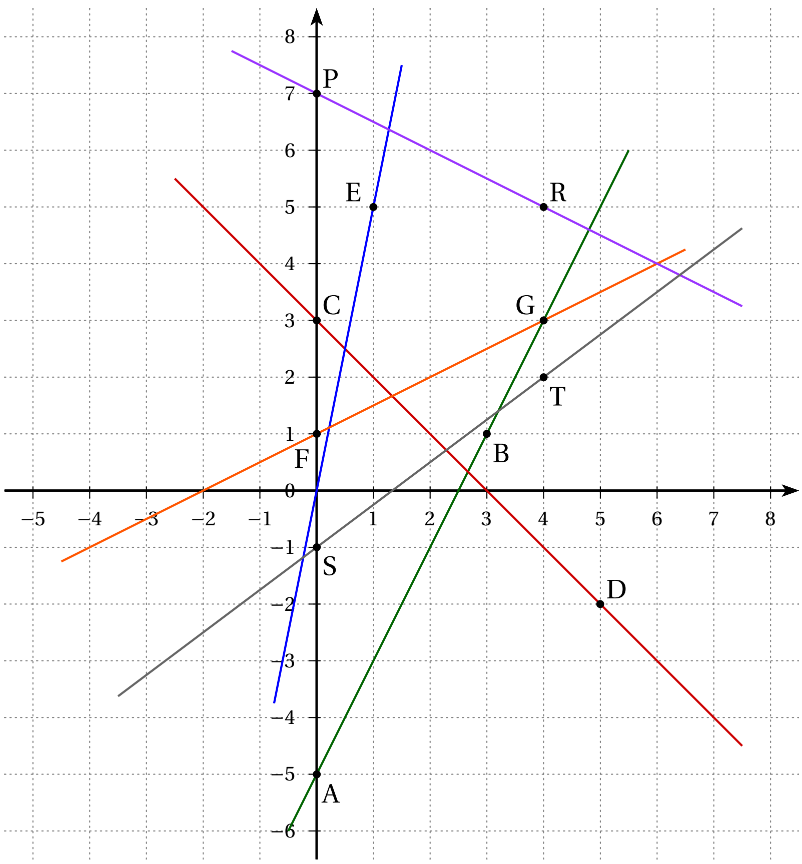
x	0	4
$f(x)$	7	5

La courbe de f est la droite passant par les points P(0 ; 7) et R(4 ; 5).

6. $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$.

x	0	4
$f(x)$	-1	2

La courbe de f est la droite passant par les points S(0 ; −1) et T(4 ; 2).



EXERCICE 4

Un étudiant a emprunté 1 000 € à ses parents. Il prévoit de rembourser 85 € par mois.

On note x le nombre de mois écoulés depuis l'emprunt et $S(x)$ la somme restant à rembourser après x mois.

1. Donner une expression de $S(x)$.
2. Étudier le signe et les variations de la fonction S.
3. En déduire au bout de combien de mois l'étudiant aura payé sa dette.

EXERCICE 5

1. Tableau de variations de la fonction carré sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$:

x	-2		0		3
x^2	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	9

2. D'après le tableau de variations de la fonction carré, lorsque $-2 \leqslant x \leqslant 3$, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 9$$

EXERCICE 6

1. L'image de -5 par la fonction carré n'est pas -25 mais 25.
2. L'image de 4 par la fonction carré n'est pas 2 mais 16.
3. Les solutions de l'équation $x^2 = 5$ sont bien $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.
4. Si $x^2 = 9$, alors x n'est pas nécessairement égal à 3 mais éventuellement égal à -3.

EXERCICE 7

Pour traiter cet exercice, on se sert la courbe représentative de la fonction inverse.

1. $\dfrac{1}{x} > 1 \iff x \in \,]0\,;\,1[.$
2. $\dfrac{1}{x} \leqslant 0 \iff x \in \,]-\infty\,;\,0[.$
3. $\dfrac{1}{x} \leqslant 1 \iff x \in \,]-\infty\,;\,0[\,\cup\,[1\,;\,+\infty[.$
4. $\dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2} \iff x \in [-2\,;\,0[.$

EXERCICE 8

Pour traiter cet exercice, on se sert la courbe représentative de la fonction inverse.

1. $1 \leqslant x \leqslant 3 \iff \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1.$
2. $0{,}5 < x \leqslant 6 \iff \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{x} < 2.$
3. $-5 < x < -1 \iff -1 < \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{5}.$

EXERCICE 9

Pour traiter cet exercice, on se sert la courbe représentative de la fonction racine carrée.

1. $\sqrt{x} \leqslant 3 \iff x \in [0\,;\,9]$.
2. L'équation $\sqrt{x} = -1$ n'a pas de solution.
3. $\sqrt{x} < \pi \iff x \in \left[0\,;\,\pi^2\right[$.
4. $\sqrt{x} \geqslant 0 \iff x \in [0\,;\,+\infty[$.

EXERCICE 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. On a : $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$.
2. On a : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2 \times 1} = 2$ et $\beta = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$.

   Comme $a > 0$, alors le tableau de variations de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

EXERCICE 11

Une entreprise produit entre 10 et 120 lampes par semaine. Elle vend chaque lampe 100 €.
Le coût de fabrication de x lampes, en euros, est donné par : $C(x) = x^2 - 20x + 2\,000$.
On note $R(x)$ la recette réalisée sur la vente de x lampes et $B(x)$ le bénéfice réalisé.

1. On a : $C(80) = 80^2 - 20 \times 80 + 2\,000$.

   Le coût de fabrication de 80 lampes est égal à 6 800 €.
2. L'entreprise vend une lampe 100 € donc, en vendant x lampes, la recette est égale à $100x$.

   Autrement dit : $R(x) = 100x$.
3. Par définition, le bénéfice algébrique est égal à la différence entre la recette et le coût.

   On a : $B(x) = R(x) - C(x) = 100x - (x^2 - 20x + 2\,000) = 100x - x^2 + 20x - 2\,000$.

   D'où : $B(x) = -x^2 + 120x - 2\,000$.
4. Soit Δ le discriminant du trinôme $B(x) = -x^2 + 120x - 2\,000$.

   On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 120^2 - 4 \times (-1) \times (-2\,000) = 6\,400$.

   Comme $\Delta > 0$, alors l'équation $B(x) = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-120 - \sqrt{6\,400}}{2 \times (-1)} = \frac{-120 - 80}{-2} = \frac{-200}{-2} = 100$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-120 + \sqrt{6\,400}}{2 \times (-1)} = \frac{-120 + 80}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20$$

   Comme $a < 0$, alors : $B(x) \geqslant 0 \iff 20 \leqslant x \leqslant 100$.

   L'entreprise réalise un bénéfice en vendant entre 20 et 100 lampes.
5. On a : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-120}{2 \times (-1)} = 60$.

   L'entreprise réalise-t-elle le bénéfice maximal en vendant 60 lampes.

EXERCICE 12

Un restaurateur propose entre 10 et 120 menus uniques chaque soir.

Le bénéfice réalisé par le restaurateur sur x menus proposés, en euros, est donné par :

$$B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 60x - 1\,000$$

1. Pour quelles valeurs de x le restaurateur réalise-t-il un bénéfice positif ?
2. Pour quelle valeur de x le restaurateur réalise-t-il le bénéfice maximal ?

EXERCICE 13

1. $e^0 = 1$
2. $e^1 \simeq 2{,}718$
3. $e^{-1} \simeq 0{,}368$
4. $e^2 \simeq 7{,}389$
5. $e^{10} \simeq 22\,026$
6. $e^{-10} \simeq 0{,}000\,045$

EXERCICE 14

1. On a : $e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$.
2. L'équation $e^x \leqslant 0$ ne possède pas de solution car, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$.
3. On a : $e^{2x-1} = 1 \iff e^{2x-1} = e^0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.
4. On a : $e^{3x} \geqslant e^{2x+2} \iff 3x \geqslant 2x + 2 \iff x \geqslant 2$.

EXERCICE 15

1. On a : $e^{3x} \times e^{-x+1} = e^{3x+(-x+1)} = e^{2x+1}$.
2. On a : $\frac{1}{e^{-5}} = e^5$.
3. On a : $\frac{e^1}{e^{-x+1}} = e^{1-(-x+1)} = e^x$.
4. On a : $\left(e^{10}\right)^2 \times e^{0,5} = e^{20} \times e^{0,5} = e^{20+0,5} = e^{20,5}$.

EXERCICE 16

1. $\ln(10) \simeq 2{,}303$
2. $\ln(2\,020) \simeq 7{,}611$
3. $\ln(0{,}001) \simeq -6{,}908$
4. $\ln(10^9) \simeq 20{,}723$
5. $\ln(10^{-9}) \simeq -20{,}723$

EXERCICE 17

1. $3\ln(2) + 2\ln(3) = \ln(2^3) + \ln(3^2) = \ln(8) + \ln(9) = \ln(8 \times 9) = \ln(72)$.
2. $4\ln(25) - 2\ln(5) = 4\ln(5^2) - 2\ln(5) = 8\ln(5) - 2\ln(5) = 6\ln(5)$.
3. $\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln(2^3) = \ln(3) - \ln(2^2) + 3\ln(2) = \ln(3) - 2\ln(2) + 3\ln(2) = \ln(3) + \ln(2) = \ln(6)$.

EXERCICE 18

Un capital de 1 000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 2 %.

Au bout de combien d'années le capital a-t-il au moins doublé ?