GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

EXERCICE 1

1. Puisque $f(-2) = 3$, alors le réel -2 a pour image le réel 3.
2. Puisque $f(-2) = 3$, alors le réel 3 a pour antécédent le réel -2.
3. Puisque $f(-2) = 3$ et $f(3) = 3$, alors le réel 3 admet deux d'antécédents.

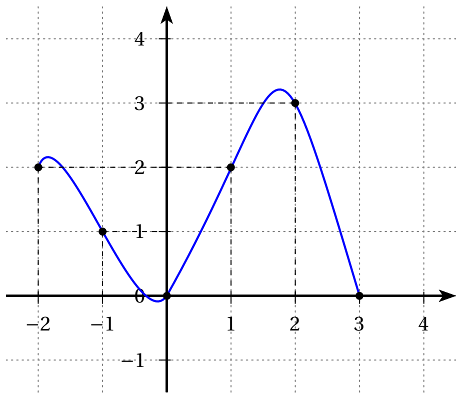
EXERCICE 2

1. On a : $h(3) = 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$.
2. Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3
$h(x) = x^2 + 2x + 1$	1	4	9	16

EXERCICE 3

Courbe de la fonction f et pointillés utiles pour répondre aux questions :

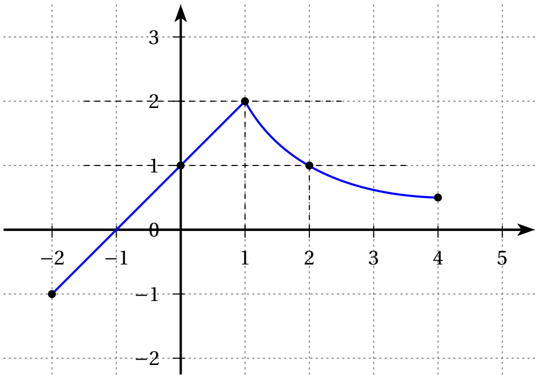


1. La courbe de la fonction f est continue du point d'abscisse -2 au point d'abscisse 3 donc l'ensemble de définition de la fonction f est égal à l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
2. Par lecture graphique, on a : $f(1) = 2$.
3. Par lecture graphique, on a : $f(3) = 0$.
4. Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	0	2	3	0

EXERCICE 4

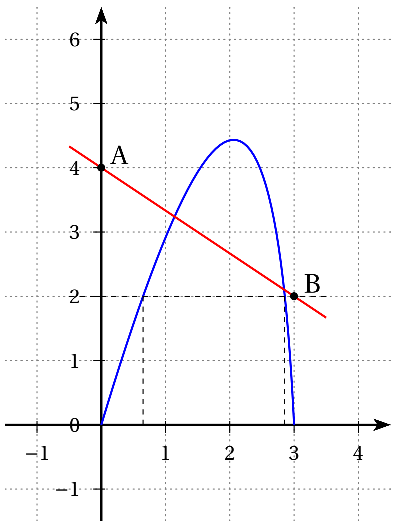
1. Courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f et pointillés utiles pour répondre aux questions :



2. **a.** Graphiquement, la solution de l'équation $f(x) = 2$ est le réel 1.
   b. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont les réels 0 et 2.
3. **a.** On a : $k = 0$.
   b. Graphiquement, la solution de l'équation $f(x) = 0$ est le réel -1.

EXERCICE 5

1. Courbe de la fonction f et pointillés utiles pour répondre aux questions :



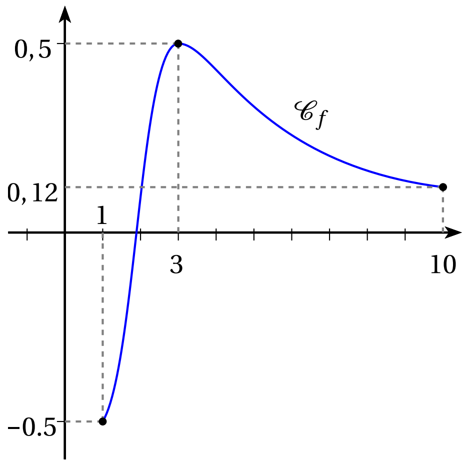
2. **a.** Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les réels 0 et 3.
   b. Puisque la courbe de f et la ligne de niveau 2 se coupent deux fois, alors l'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions x_1 et x_2.
   On a : $0 < x_1 < 1$ et $2 < x_2 < 3$.
3. **a.** Voir la figure.
   b. Puisque les courbes de f et de g se coupent deux fois, alors l'équation $f(x) = g(x)$ admet deux solutions x_3 et x_4.

EXERCICE 6

1. Le réel 1 a pour antécédent -3 par la fonction f : $f(-3) = 1$.
2. Le réel -2 a pour image 4 par la fonction f : $f(-2) = 4$.
3. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse -1 et 5 : $f(-1) = 0$ et $f(5) = 0$.
4. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(3~;~4)$: $f(3) = 4$.
5. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 : $f(0) = 2$.

EXERCICE 7

1. **a.** La fonction f est croissante sur l'intervalle $[1~;~3]$.
   b. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[3~;~10]$.

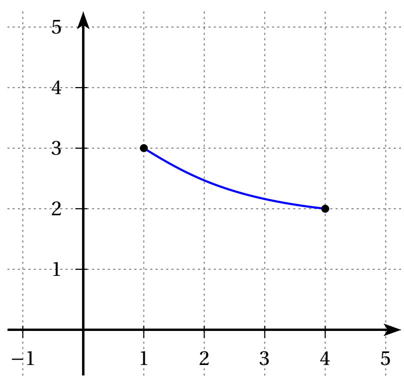


2. Tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~10]$:

x	1		3		10
			0,5		
$f(x)$		↗		↘	
	$-0{,}5$				0,12

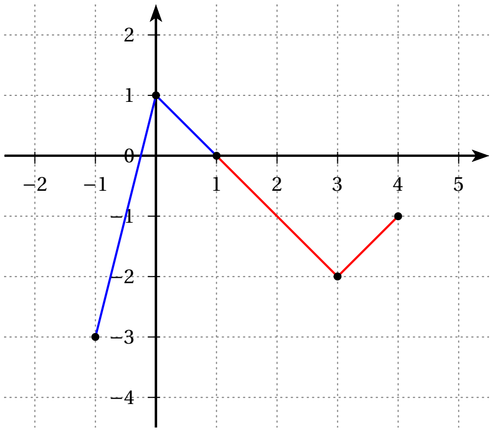
EXERCICE 8

Courbe possible d'une fonction f décroissante sur l'intervalle $[1~;~4]$ et telle que $f(1) = 3$ et $f(4) = 2$:



EXERCICE 9

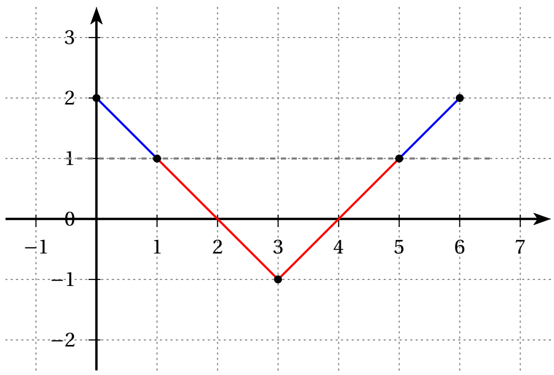
1. Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ est 1 atteint en 0.
2. Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ est -3 atteint en -1.
3. En rouge la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$:



4. Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$ est 0 atteint en 1.
   Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$ est -2 atteint en 3.

EXERCICE 10

1. Figure :



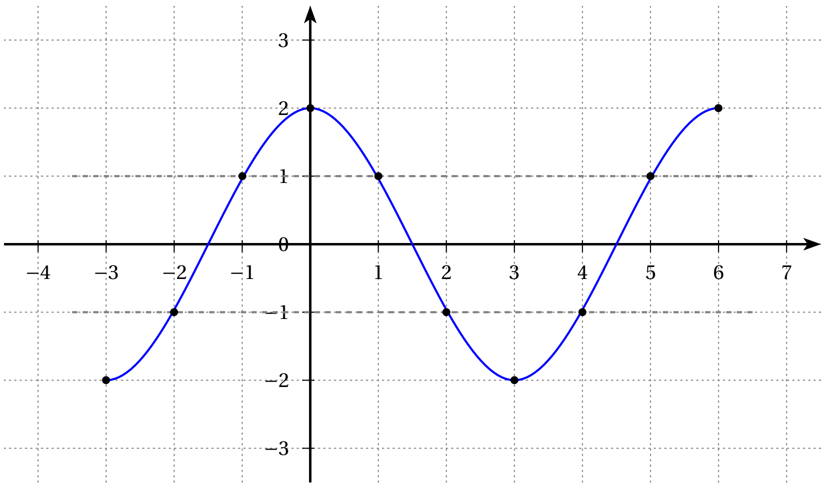
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 1$ est l'intervalle $[1\ ;\ 5]$.

EXERCICE 11

1. Oui, la fonction f est bien définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 9]$ car $x \in [0\ ;\ 9]$.
2. Non, $f(1)$ n'est pas égal à 3 mais compris entre 1 et 2. Par contre $f(3) = 1$.
3. Oui, le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ est un point de la courbe de f car $f(0) = 2$.
4. Non, la fonction f n'est pas croissante sur $[1\ ;\ 5]$ car elle est décroissante sur $[1\ ;\ 3]$.
5. Oui, la fonction f est décroissante sur $[1\ ;\ 3]$ car elles est décroissante sur $[0\ ;\ 3]$.

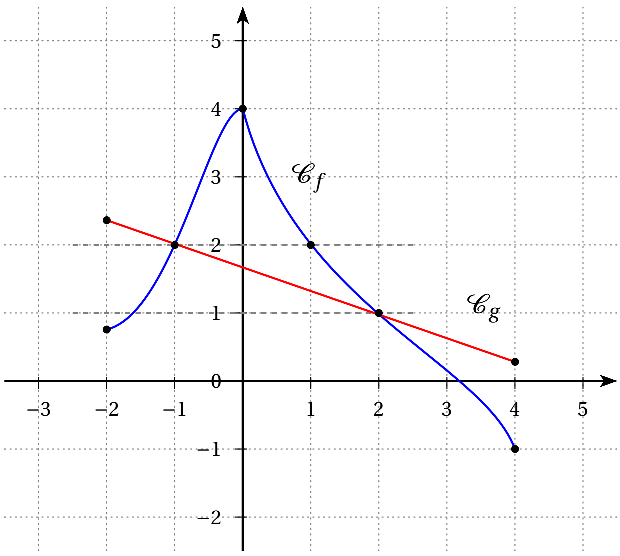
EXERCICE 12

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ est $]-1\,;\,1[\cup]5\,;\,6]$.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 1$ est $[-3\,;\,-1]\cup[1\,;\,5]$.
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > -1$ est $]-2\,;\,2[\cup]4\,;\,6]$.



EXERCICE 13

1. **a.** Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 1.
   b. La solution de l'équation $g(x) = 1$ est 2.
   c. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont -1 et 2.
2. **a.** L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 2$ est $[-2\,;\,-1]\cup[1\,;\,4]$.
   b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) > 1$ est $[-2\,;\,2[$.
   c. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $]-1\,;\,2[$.
   d. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est $[-2\,;\,-1]\cup[2\,;\,4]$.



EXERCICE 14

1. Tableau de variations de f :

x	-3		-1		1		3
$f(x)$	18	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-18

2. D'après le tableau de variations, le maximum de f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ est 18 et le minimum de f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ est -18.

EXERCICE 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 + 5$.

1. On a : $f(2) = (2-2)^2 + 5 = 0^2 + 5 = 0 + 5 = 5$.

   On a : $f(x) - f(2) = (x-2)^2 + 5 - 5 = (x-2)^2$.
2. Comme un carré est toujours positif, alors, pour tout réel x : $f(x) - f(2) \geqslant 0$.

   Par conséquent, pour tout réel x : $f(x) \geqslant f(2)$.

   Par définition, le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est le réel 5 atteint en 2.

EXERCICE 16

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 9 - (x-1)^2$.

1. On a : $g(1) = 9 - (1-1)^2 = 9 - 0^2 = 9 - 0 = 9$.

   On a : $g(x) - g(1) = 9 - (x-1)^2 - 9 = -(x-1)^2$.
2. Comme l'opposé d'un carré est toujours négatif, alors, pour tout réel x : $g(x) - g(1) \leqslant 0$.

   Par conséquent, pour tout réel x : $g(x) \leqslant g(1)$.

   Par définition, le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est le réel 9 atteint en 1.