

RÉVISIONS EN VUE DE L'EXAMEN**1. INFORMATIONS CHIFFRÉES****EXERCICE 1**

1. Entre 2004 et 2014, le SMIC mensuel brut est passé de 1 154 € à 1 445 €.

Quel est le taux d'évolution du SMIC, arrondi à 0,1 %, entre 2004 et 2014?

$$\text{On a : } t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{1\,445 - 1\,154}{1\,154} = \frac{291}{1\,154} \simeq 0,252 \simeq 25,2 \, \%.$$

Réponse **d.**

2. Selon une étude, le loyer moyen d'un studio en 2014 à Bordeaux est de 470 €.

Quel pourcentage du SMIC, arrondi à 0,1 %, cela représente-t-il?

$$\text{On a : } p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{470}{1\,445} \simeq 0,325 \simeq 32,5 \, \%.$$

Réponse **c.**

3. Entre 2013 et 2014, le SMIC a augmenté d'environ 1 %.

En supposant que cette évolution annuelle se poursuive dans les cinq prochaines années, quelle serait la valeur du SMIC mensuel brut en 2019, arrondie à l'euro?

$$\text{On a : } y_2 = (1 + t)^n \times y_1 = 1,01^5 \times 1\,445 \simeq 1\,519.$$

Réponse **d.**

4. Le prix d'un article vendu dans un magasin a augmenté de 30 % durant les 3 derniers mois.

$$\text{On a : } 1 + t_{\text{moyen}} = (1 + t_{\text{global}})^{1/n} = 1,30^{1/3} \simeq 1,091 \, 4.$$

$$\text{D'où : } t_{\text{moyen}} \simeq 1,091 \, 4 - 1 \simeq 0,091 \, 4 \simeq 9,14 \, \%.$$

Le taux d'évolution mensuel moyen est environ égal à 9,14 %.

Réponse **a.**

5. Lors d'une période de promotion, le prix d'un produit a subi deux baisses consécutives de 12 %.

Le fabricant désire lui appliquer une hausse pour revenir au prix initial avant la période de promotion.

$$\text{On a : } 1 + t_{\text{global}} = (1 + t_1) \times (1 + t_2) = 0,88 \times 0,88 = 0,774 \, 4.$$

$$\text{On a : } 1 + t_{\text{réciproque}} = \frac{1}{1 + t_{\text{global}}} = \frac{1}{0,774 \, 4} \simeq 1,291 \, 3.$$

$$\text{D'où : } t_{\text{réciproque}} \simeq 1,291 \, 3 - 1 \simeq 0,291 \, 3 \simeq 29,13 \, \%.$$

La hausse doit être environ égale à 29,13 %.

Réponse **c.**

EXERCICE 2

1. Le prix d'un objet augmente de 10 % une année, de 15 % l'année suivante, puis de 20 % la troisième année.

$$\text{On a : } 1 + t_{\text{global}} = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \times (1 + t_3) = 1,10 \times 1,15 \times 1,20 = 1,518.$$

$$\text{D'où : } t_{\text{global}} = 1,518 - 1 = 0,518 \simeq 51,8 \, \%.$$

Au bout de 3 ans et par rapport au prix initial, le prix augmente de 51,8 %.

Réponse **b**.

2. Les indices en 2008 et en 2012 de la production d'une entreprise sont respectivement 102 et 108.

$$\text{On a : } t = \frac{I_2 - I_1}{I_1} = \frac{108 - 102}{102} = \frac{6}{102} \simeq 0,0588 \simeq 5,88 \, \%.$$

Entre 2008 et 2012, la production augmente d'environ 5,88 %.

Réponse **b**.

3. Le prix d'un objet augmente de 15 % entre juin et septembre.

$$\text{On a : } I_1 = \frac{I_2}{1 + t} = \frac{100}{1,15} \simeq 87.$$

En choisissant le mois de septembre pour base 100, l'indice du prix de l'objet en juin est environ égal à 87.

Réponse **c**.

2. TAUX D'ÉVOLUTION - SUITES

EXERCICE 3

On s'intéresse au recyclage des emballages ménagers en plastique issus de la collecte sélective (EMPCS).

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016.

Cette masse est exprimée en millier de tonnes et arrondie au millier de tonnes.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Masse d'EMPCS recyclés	229	243	250	256	266	282

PARTIE A.

1. On a : $t_{\text{global}} = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{282 - 229}{229} \approx 0,23 \approx 23 \%$.

Entre 2011 et 2016, la masse d'EMPCS recyclés augmente bien d'environ 23 %.

2. Entre 2011 et 2016, il s'écoule 5 ans.

On a : $1 + t_{\text{moyen}} = (1 + t_{\text{global}})^{1/5} \approx 1,23^{1/5} \approx 1,042$.

D'où : $t_{\text{moyen}} \approx 1,042 - 1 \approx 0,042 \approx 4,2 \%$.

Entre 2011 et 2016, le taux d'évolution annuel moyen de la masse d'EMPCS recyclés est environ égal à 4,2 %.

PARTIE B.

On fait l'hypothèse qu'à partir de 2016, le taux d'évolution annuel de la masse d'EMPCS recyclés est constant et égal à 4,2 %.

La masse d'EMPCS recyclés au cours de l'année $2016 + n$, exprimée en millier de tonnes, est modélisée par le terme de rang n d'une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 282$.

1. Chaque année, la masse d'EMPCS recyclés augmente de 4,2 %.

Autrement dit, chaque année, la masse d'EMPCS recyclés est multipliée par 1,042.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 1,042 \times u_n$$

Par définition, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,042.

2. Par propriété et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 1,042^n \times u_0$$

$$u_n = 1,042^n \times 282$$

3. En 2019, $n = 3$, et on a : $u_3 = 1,042^3 \times 282 \approx 319$.

La masse d'EMPCS recyclés en 2019 est environ égale à 319 milliers de tonnes.

4. On a : $u_n = 2 \times 282 \Leftrightarrow 1,042^n \times 282 = 2 \times 282 \Leftrightarrow 1,042^n = 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,042)}$.

Or : $\frac{\ln(2)}{\ln(1,042)} \approx 16,84$.

La masse d'EMPCS recyclés aura au moins doublé au bout de 17 ans depuis l'année 2016, c'est à dire en 2033.

EXERCICE 4

Julien vient de créer une application informatique destinée aux particuliers et permettant l'organisation d'événements. Le 1^{er} avril 2018, il envoie une offre de téléchargement de son application à toutes les personnes de son carnet d'adresses.

Chaque semaine, il a relevé le nombre de personnes ayant téléchargé son application. Ses observations sur les 11 premières semaines sont répertoriées dans le tableau ci-dessous.

Le rang 0 correspond à la semaine du 1^{er} au 7 avril 2018.

x_i : rang de la semaine	0	1	2	3	4	5
y_i : nombre de téléchargements	150	180	210	260	296	370

x_i : rang de la semaine	6	7	8	9	10
y_i : nombre de téléchargements	457	572	698	883	1 095

PARTIE A.

1. On a : $t_{\text{global}} = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{1\,095 - 296}{296} \simeq 2,70 \simeq 270 \%$.

Entre la semaine de rang 4 et la semaine de rang 10, le taux d'évolution global du nombre de téléchargements est bien environ égal à 270 %.

2. Entre la semaine de rang 4 et la semaine de rang 10, il s'écoule 6 semaines.

On a : $1 + t_{\text{moyen}} = (1 + t_{\text{global}})^{1/6} \simeq 3,70^{1/6} \simeq 1,24$.

D'où : $t_{\text{moyen}} \simeq 1,24 - 1 \simeq 0,24 \simeq 24 \%$.

Entre la semaine de rang 4 et la semaine de rang 10, le taux d'évolution hebdomadaire moyen du nombre de téléchargements est environ égal à 24 %.

PARTIE B.

On fait l'hypothèse qu'à partir de la semaine de rang 10, le taux d'évolution hebdomadaire du nombre de téléchargements est constant et égal à 24 %.

Le nombre de téléchargements hebdomadaires au cours de la semaine de rang $10 + n$ est alors modélisé par le terme u_n d'une suite de premier terme $u_0 = 1\,095$.

1. Chaque semaine, le nombre de téléchargements augmente de 24 %.

Autrement dit, chaque semaine, le nombre de téléchargements est multiplié par 1,24.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1,24 \times u_n$.

Par définition, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,24.

2. Par propriété et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1,24^n \times u_0 = 1,24^n \times 1\,095$.

3. Lors de la semaine de rang 20, $n = 10$, et on a : $u_{10} = 1,24^{10} \times 1\,095 \simeq 9\,411$.

Julien peut espérer environ 9 411 téléchargements lors de la semaine de rang 20.

4. Un sponsor a contacté Julien, lui proposant une participation financière pour promouvoir son projet à plus grande échelle, dès lors que le nombre de téléchargements hebdomadaires dépassera 20 000.

$$\text{On a : } u_n > 20\,000 \Leftrightarrow 1,24^n \times 1\,095 > 20\,000 \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{20\,000}{1\,095}\right)}{\ln(1,24)} \text{ et } \frac{\ln\left(\frac{20\,000}{1\,095}\right)}{\ln(1,24)} \simeq 13,5.$$

Julien sera sponsorisé à partir de la semaine de rang 24.

EXERCICE 5

Le tableau ci-dessous donne l'émission moyenne de CO₂ (exprimée en grammes de CO₂ par km) des voitures particulières neuves, immatriculées chaque année en France, entre 1995 et 2013.

Année	1995	2000	2005	2007	2008
Émission moyenne de CO ₂	173	162	152	149	140

Année	2009	2010	2011	2012	2013
Émission moyenne de CO ₂	133	130	127	124	117

Partie A.

1. On a : $t_{\text{global}} = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{117 - 173}{173} \simeq -0,324 \simeq -32,4 \%$.

Entre 1995 et 2013, le taux global d'évolution des émissions moyennes de CO₂ des voitures particulières neuves est environ égal à $-32,4 \%$.

2. Entre 1995 et 2013, il s'écoule 18 ans.

$$\text{On a : } 1 + t_{\text{moyen}} = (1 + t_{\text{global}})^{1/18} \simeq 0,976^{1/18} \simeq 0,979.$$

$$\text{D'où : } t_{\text{moyen}} \simeq 0,979 - 1 \simeq -0,021 \simeq -2,1 \%.$$

Entre 1995 et 2013, le taux moyen annuel d'évolution des émissions moyennes de CO₂ des voitures particulières neuves est environ égal à $-2,1 \%$.

Partie B.

Dans cette partie, on se propose de modéliser, par une suite géométrique, l'évolution de l'émission moyenne de CO₂ (exprimée en grammes de CO₂ par km) des voitures particulières neuves immatriculées chaque année en France.

On considère que celle-ci diminue de $2,1 \%$ par an à partir de 2013.

Pour tout entier naturel n , on note u_n l'émission moyenne de CO₂ des voitures particulières neuves immatriculées dans l'année en France pour l'année $2013 + n$. Ainsi $u_0 = 117$.

1. a. On a : $u_1 = (1 + t) \times u_0 = 0,979 \times 117 \simeq 114,5$.

b. On a : $u_2 = (1 + t) \times u_1 \simeq 0,979 \times 114,5 \simeq 112,1$.

2. Chaque année, l'émission moyenne de CO₂ diminue de $2,1 \%$.

Autrement dit, chaque année, l'émission moyenne de CO₂ est multipliée par $0,979$.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0,979 \times u_n$$

Par définition, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,979$.

3. Par propriété et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 0,979^n \times u_0$$

$$u_n = 0,979^n \times 117$$

4. En 2020, $n = 7$, et on a : $u_7 = 0,979^7 \times 117 \simeq 100,8$.

La France ne respectera pas l'objectif européen d'émissions moyennes d'au maximum 95 grammes de CO₂ par km en 2020 pour les voitures particulières neuves.

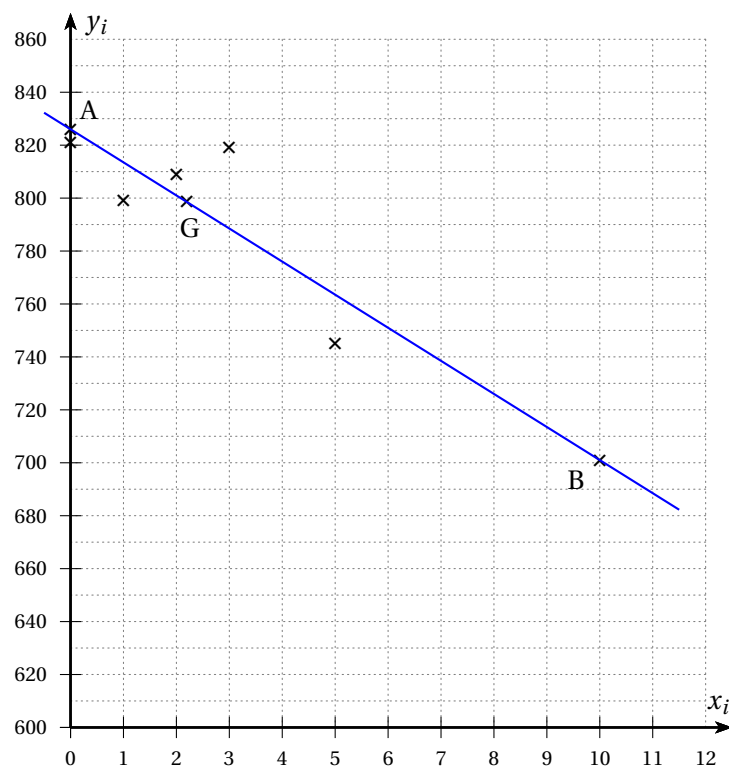
3. STATISTIQUES

EXERCICE 6

Le tableau suivant donne la consommation annuelle de pizzas en France entre 2012 et 2017. Les données concernant l'année 2016 ne sont pas connues.

Année	2012	2013	2014	2015	2017
Rang x_i	0	1	2	3	5
Nombre de pizzas consommées y_i (en millions)	821	799	809	819	745

1. Nuage de points associé à la consommation annuelle de pizzas en France, point moyen, et droite de régression :



2. Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les coordonnées du point moyen G du nuage de points.

$$\text{On a : } \bar{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 5}{5} = 2,2 \text{ et } \bar{y} = \frac{821 + 799 + 809 + 819 + 745}{5} = 798,6.$$

3. A la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de ce nuage de points par la méthode des moindres carrés est donnée par : $y = -12,541x + 826,189$.

4. Lorsque $x = 0$, $y = -12,5 \times 0 + 826 = 826$.

$$\text{Lorsque } x = 10, y = -12,5 \times 10 + 826 = 701.$$

La droite d'équation $y = -12,5x + 826$ passe par le point A de coordonnées (0 ; 826) et par le point B de coordonnées (10 ; 701).

5. En 2022, $x = 10$ et $y = -12,5 \times 10 + 826 = 701$.

En admettant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, on consommera 701 millions de pizzas en 2022.

EXERCICE 7

Le tableau ci-dessous donne le nombre de nuitées (en milliers) dans l'hôtellerie en Bretagne au mois de janvier entre 2013 et 2017 (source : INSEE).

Année	2013	2014	2015	2016	2017
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Nombre de nuitées (en millier) y_i	310	323,7	339,4	347,9	368,9

On a représenté ci-dessous le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$.

- Entre 2013 et 2017 : $t = \frac{368,9 - 310}{310} = 0,19 = 19 \%$.

Le nombre de nuitées a augmenté de 19 % entre janvier 2013 et janvier 2017.

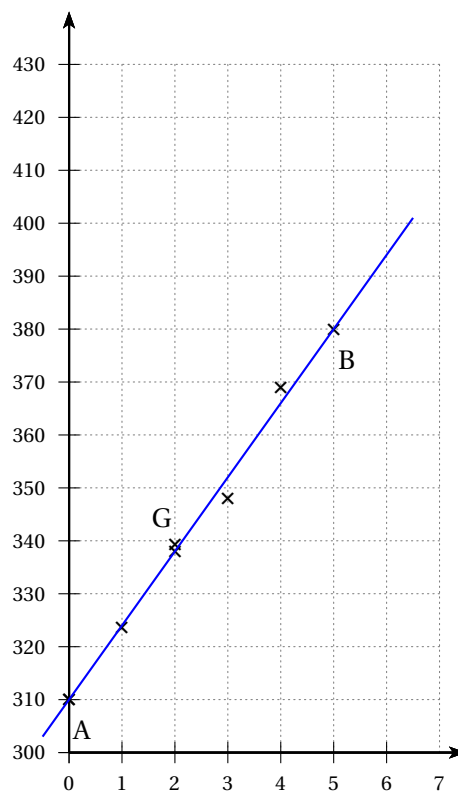
- Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les coordonnées du point moyen G du nuage de points.

$$\text{On a : } \bar{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4}{5} = 2 \text{ et } \bar{y} = \frac{310 + 323,7 + 339,4 + 347,9 + 368,9}{5} = 337,98.$$

- A la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de ce nuage de points par la méthode des moindres carrés est donnée par : $y = 14,2x + 309,58$.
- Lorsque $x = 0$, $y = 14 \times 0 + 310 = 310$.

Lorsque $x = 5$, $y = 14 \times 5 + 310 = 380$.

La droite d'équation D d'équation $y = 14x + 310$ passe par le point A de coordonnées $(0 ; 310)$ et par le point B de coordonnées $(5 ; 380)$.



- En janvier 2020, $x = 7$ et $y = 14 \times 7 + 310 = 408$.

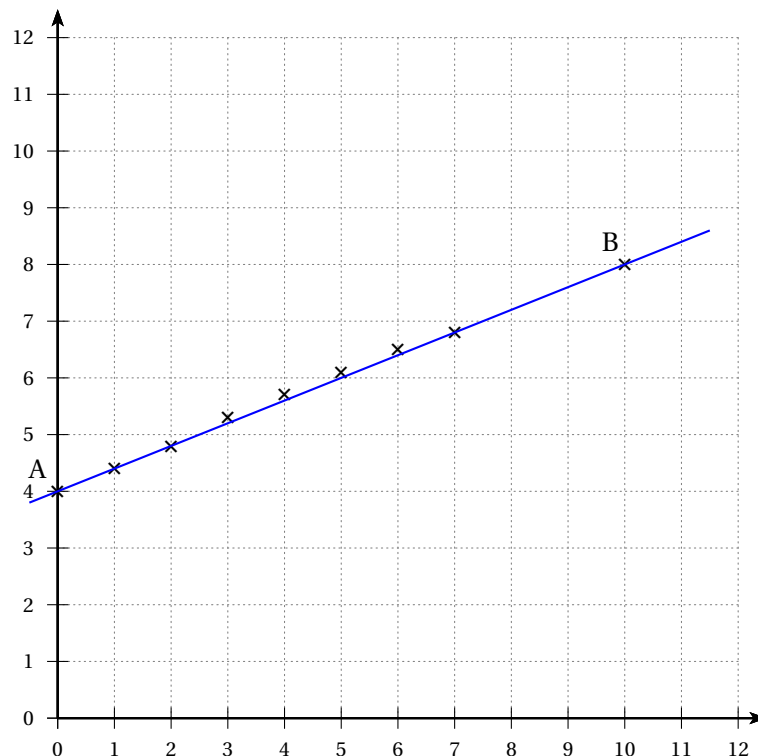
A l'aide de cet ajustement, on peut estimer 408 nuitées en janvier 2020.

EXERCICE 8

Le tableau ci-dessous donne l'évolution, par tranches de cinq années, de la population mondiale (en milliards) entre 1980 et 2010.

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'habitants : y_i	4,4	4,8	5,3	5,7	6,1	6,5	6,8

1. Nuage de points $(x_i ; y_i)$ associé au tableau et droite de régression :



2. A la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de ce nuage de points par la méthode des moindres carrés est donnée par : $y = 0,41x + 4,03$.
3. On modélise l'évolution de l'effectif y de la population mondiale, exprimé en milliards, en fonction du rang x de l'année par l'expression $y = 0,4x + 4$.
- a. Lorsque $x = 0$, $y = 0,4 \times 0 + 4 = 4$.
Lorsque $x = 10$, $y = 0,4 \times 10 + 4 = 8$.
La droite d'équation $y = 0,4x + 4$ passe par le point A de coordonnées (0 ; 4) et par le point B de coordonnées (10 ; 8).
 - b. En 2015, $x = 8$ et $y = 0,4 \times 8 + 4 = 7,2$.
A l'aide de ce modèle, on peut estimer à 7,2 milliards d'habitants la population dans le monde en 2015.
 - c. On a : $y \geq 8 \Leftrightarrow 0,4x + 4 \geq 8 \Leftrightarrow 0,4x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 10$.
C'est en 2025 que $x = 10$ donc, selon ce modèle, la population mondiale devrait dépasser 8 milliards d'habitants en 2025.

4. PROBABILITÉS

EXERCICE 9

PARTIE A.

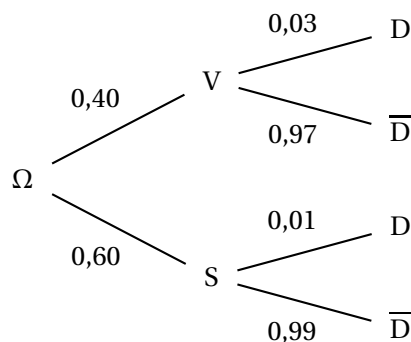
Un fournisseur fabrique en grande quantité deux modèles de paires de chaussures : le modèle Ville et le modèle Sport. On sait que :

- 40 % de la production correspond au modèle Ville et 60 % de la production correspond au modèle Sport.
- 3 % des modèles Ville présentent un défaut et 1 % des modèles Sport présentent un défaut.

On choisit au hasard une paire de chaussures produite par cette entreprise et on note :

- V l'événement : « la paire choisie est un modèle Ville » et S l'événement : « la paire choisie est un modèle Sport ».
- D l'événement : « la paire choisie présente un défaut ».

1. Arbre pondéré :



2. On a : $p(V \cap D) = p(V) \times p_V(D) = 0,40 \times 0,03 = 0,012$.

3. On a : $p(D) = p(V \cap D) + p(S \cap D) = 0,012 + p(S) \times p_S(D) = 0,012 + 0,60 \times 0,01 = 0,018$.

La probabilité de choisir un modèle avec un défaut est bien égale à 0,018.

4. On a : $p_D(V) = \frac{p(D \cap V)}{p(D)} = \frac{0,012}{0,018} \approx 0,667$.

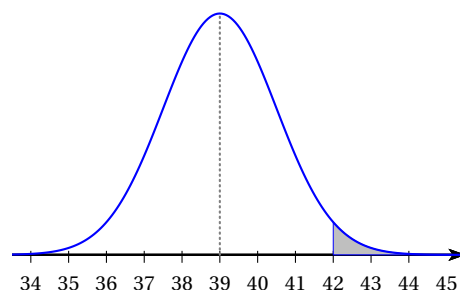
La probabilité de choisir un modèle Ville sachant qu'il présente un défaut est environ égale à 0,667.

PARTIE B.

Une étude statistique a montré que la pointure de chaussures pour les femmes en France peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale.

La courbe de densité de cette loi normale est représentée ci-contre et on sait que :

$$p(X > 42) \approx 0,023$$



1. Pour des raisons de symétrie de la courbe de densité de la loi normale par rapport à l'espérance, la pointure moyenne μ des femmes françaises est égale à 39.

2. On a : $p(36 \leq X \leq 42) = 1 - 2 \times p(X > 42) \approx 1 - 2 \times 0,023 \approx 0,954$.

La probabilité que la pointure d'une femme française soit comprise entre 36 et 42 est environ égale à 0,954.

EXERCICE 10

Une enquête a été réalisée dans une entreprise sur les habitudes alimentaires des salariés.

Dans cette entreprise, on distingue trois types de salariés : des ouvriers ; des agents de maîtrise ; des cadres. Parmi les résultats obtenus, on peut remarquer que :

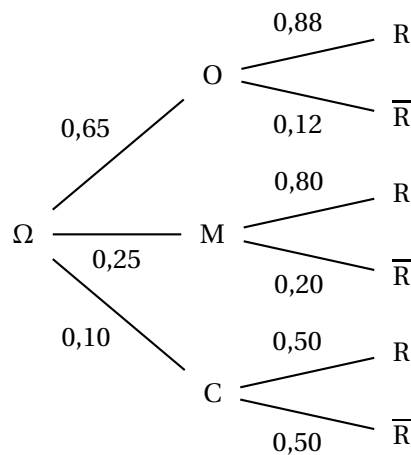
- L'entreprise compte 65 % d'ouvriers et 25 % des salariés interrogés sont des agents de maîtrise.
- Parmi les ouvriers, 88 % déjeunent au moins une fois par semaine au restaurant d'entreprise.
- Parmi les agents de maîtrise, 80 % y déjeunent au moins une fois par semaine.
- Parmi les cadres, 50 % y déjeunent au moins une fois par semaine.

PARTIE A.

On interroge au hasard un salarié de l'entreprise. On considère les événements suivants :

- O : « le salarié interrogé est un ouvrier ».
- M : « le salarié interrogé est un agent de maîtrise ».
- C : « le salarié interrogé est un cadre ».
- R : « le salarié interrogé déjeune au moins une fois par semaine au restaurant d'entreprise ».

1. Arbre pondéré :



2. L'événement $O \cap R$ est l'événement : « le salarié interrogé est un ouvrier **et** déjeune au moins une fois par semaine au restaurant d'entreprise ».

$$\text{On a : } p(O \cap R) = p(O) \times p_O(R) = 0,65 \times 0,88 = 0,572.$$

3. On a : $p(R) = p(O \cap R) + p(M \cap R) + p(C \cap R) = 0,65 \times 0,88 + 0,25 \times 0,80 + 0,10 \times 0,50 = 0,822$.

4. On a : $p_R(O) = \frac{p(R \cap O)}{p(R)} = \frac{0,572}{0,822} \approx 0,696$.

La probabilité que le salarié soit un ouvrier sachant qu'il déjeune au moins une fois par semaine au restaurant est environ égale à 0,696.

PARTIE B.

Le nombre de salariés qui mangent au restaurant d'entreprise varie chaque jour.

Le nombre de salariés déjeunant au restaurant d'entreprise est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 410$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. A la calculatrice : $p(390 \leq X \leq 430) \approx 0,95$.

2. On cherche $p(X > 430)$.

$$\text{On a : } p(X > 430) = 0,50 - p(410 \leq X \leq 430) \approx 0,5 - 0,48 \approx 0,02.$$

La probabilité qu'il n'y ait pas suffisamment de repas est environ égale à 0,02.

EXERCICE 11

PARTIE A.

Une coopérative de fruits doit calibrer sa production de cerises, c'est-à-dire les trier selon leur taille. Elle produit des cerises burlats et des cerises griottes. Les cerises qui ont un calibre trop petit seront écartées du stock et ne pourront pas être commercialisées.

On sait que 70 % des cerises produites sont des burlats; les autres sont donc des griottes.

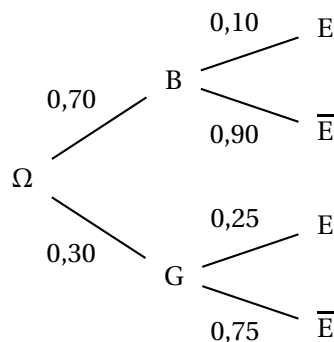
Parmi les burlats, 10 % sont écartées et parmi les griottes 25 % le sont également.

On choisit au hasard une cerise dans le stock, avant le calibrage. On considère les événements suivants :

• B : « la cerise choisie est une burlat » et G : « la cerise choisie est une griotte ».

• E : « la cerise choisie est écartée du stock ».

1. Arbre pondéré :



2. L'événement : « $B \cap E$ » est l'événement « La cerise est une burlat et elle est écartée du stock ».

3. On a : $p(B \cap E) = p(B) \times p_B(E) = 0,70 \times 0,10 = 0,070$.

4. On a : $p(E) = p(B \cap E) + p(G \cap E) = 0,070 + p(G) \times p_G(E) = 0,070 + 0,30 \times 0,25 = 0,145$.

La probabilité que la cerise soit écartée du stock est bien égale à 0,145.

5. On a : $p_E(G) = \frac{p(E \cap G)}{p(E)} = \frac{0,30 \times 0,25}{0,145} \approx 0,517$.

La probabilité qu'une cerise soit une griotte sachant qu'elle a été écartée du stock est environ égale à 0,517.

PARTIE B.

Dans cette partie, on s'intéresse à une autre coopérative qui produit exclusivement des cerises du type bigarreaux. On admet que la taille T , en millimètres, de ces bigarreaux suit une loi normale d'espérance $\mu = 22$ mm et d'écart-type $\sigma = 1,6$ mm.

Ces cerises sont réparties en trois catégories selon leur taille : « classique » si $21 \leq T \leq 23,6$; « gourmande » si $T \geq 23,6$; « déclassée » si $T \leq 21$.

On choisit au hasard une cerise dans le stock de cette coopérative.

1. A la calculatrice, on a : $p(21 \leq T \leq 23,6) \approx 0,575$.

La probabilité que la cerise choisie soit classique est environ égale à 0,575.

2. A la calculatrice, on a : $p(T \geq 23,6) = p(T \geq 22) - p(22 \leq T \leq 23,6) \approx 0,5 - 0,341 \approx 0,159$.

La probabilité que la cerise choisie soit gourmande est environ égale à 0,159.

A la calculatrice, on a : $p(T \leq 21) = p(T \leq 22) - p(21 \leq T \leq 22) \approx 0,5 - 0,234 \approx 0,266$.

La probabilité que la cerise choisie soit déclassée est environ égale à 0,266.

5. ÉTUDE D'UNE FONCTION

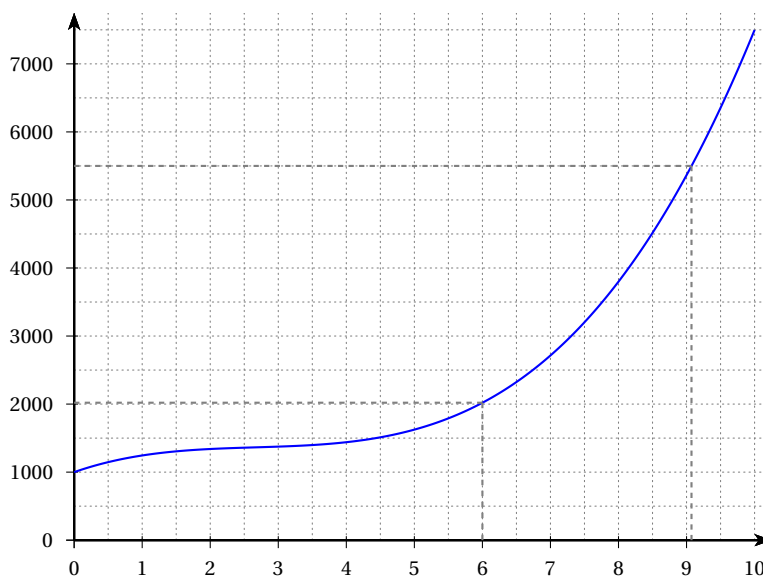
EXERCICE 12

Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x , par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1\,000$$

La courbe de la fonction C est représentée sur le graphique ci-dessous.



PARTIE A. Étude du coût total

1. On a : $C(0) = 15 \times 0^3 - 120 \times 0^2 + 350 \times 0 + 1\,000 = 1\,000$.

Le montant des coûts fixes est égal à 1 000 €.

2. a. Graphiquement, le montant du coût total lorsque l'entreprise produit 6 km de tissu est environ égal à 2 000 €.

- b. On a : $C(6) = 15 \times 6^3 - 120 \times 6^2 + 350 \times 6 + 1\,000 = 2\,020$.

La valeur exacte de ce coût est 2 020 €.

3. Graphiquement, la longueur de tissu produit lorsque le coût total s'élève à 5 500 € est environ égale à 9 kilomètres.

PARTIE B. Étude du bénéfice

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.

Pour tout $x \in [0 ; 10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice, générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. On a : $R(x) = 530x$.

2. Par définition, le bénéfice est égal à la différence entre la recette et le coût total.

$$\text{On a : } B(x) = R(x) - C(x) = 530x - (15x^3 - 120x^2 + 350x + 1\,000).$$

$$\text{D'où : } B(x) = 530x - 15x^3 + 120x^2 - 350x - 1\,000.$$

$$\text{On a bien : } B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1\,000.$$

3. Pour tout $x \in [0 ; 10]$, on a : $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$.
4. Soit Δ le discriminant du trinôme $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90\,000$.

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation $B'(x) = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-240 - \sqrt{90\,000}}{2 \times (-45)} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-240 + \sqrt{90\,000}}{2 \times (-45)} = -\frac{2}{3}$$

Comme $a < 0$, alors le trinôme $B'(x)$ est positif entre ses racines et négatif ailleurs et le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 10]$ est donné par :

x	0	6	10
$B'(x)$		+	-
$B(x)$	-1 000	1 160	-2 200

On a : $B(0) = -15 \times 0^3 + 120 \times 0^2 + 180 \times 0 - 1\,000 = -1\,000$.

On a : $B(6) = -15 \times 6^3 + 120 \times 6^2 + 180 \times 6 - 1\,000 = 1\,160$.

On a : $B(10) = -15 \times 10^3 + 120 \times 10^2 + 180 \times 10 - 1\,000 = -2\,200$.

5. a. D'après le tableau de variations, l'entreprise réalise un bénéfice maximal en produisant et en vendant 6 kilomètres de tissu.
- b. Le bénéfice maximal est égal à 1 160 €.

EXERCICE 13

PARTIE A.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[5\,000 ; 15\,000]$ par : $f(x) = 9 + \frac{63\,000}{x}$.

1. La fonction f est de la forme $u + v$ avec $u(x) = 9$ et $v(x) = \frac{63\,000}{x}$.

On a : $u'(x) = 0$ et $v'(x) = -\frac{63\,000}{x^2}$.

On a : $f'(x) = -\frac{63\,000}{x^2}$.

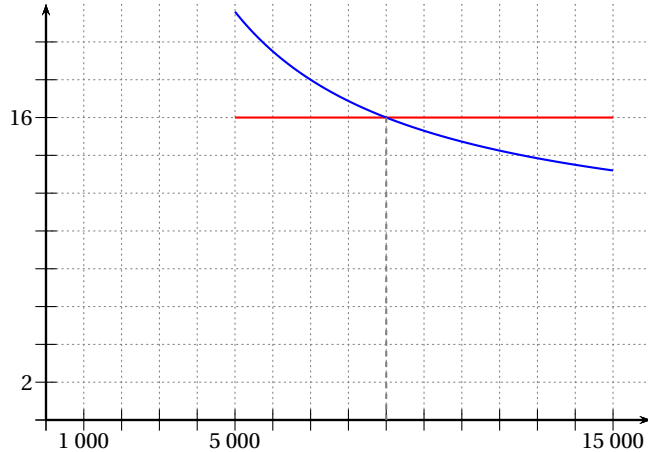
2. Un carré est toujours positif donc, pour tout $x \in [5\,000 ; 15\,000]$, on a : $f'(x) < 0$.

Par conséquent, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[5\,000 ; 15\,000]$ et le tableau de variations de f est donnée par :

x	5 000	15 000
$f'(x)$		-
$f(x)$	21,6	13,2

3. Dans le repère suivant sont représentées la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[5\ 000 ; 15\ 000]$ et la droite (d) d'équation $y = 16$.

Graphiquement, les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite (d) sont données par $(9\ 000 ; 16)$.



PARTIE B.

Un restaurateur propose un menu unique.

- Les charges fixes sont estimées pour une année à 63 000 €.
- Le coût de préparation d'un repas est estimé à 9 €.
- Le prix du menu est de 16 €.

Dans cette partie on suppose que tous les repas préparés sont vendus. On désigne par x le nombre de repas servis en un an et on suppose que x appartient à l'intervalle $[5\ 000 ; 15\ 000]$.

1. En notant $g(x)$ le coût total annuel en € de ces x repas, on a : $g(x) = 9x + 63\ 000$.
2. Par définition, le coût de revient d'un repas est donné par l'expression $\frac{g(x)}{x}$.

$$\text{On a : } \frac{g(x)}{x} = \frac{9x + 63\ 000}{x} = 9 + \frac{63\ 000}{x} = f(x).$$

3. L'exploitation du restaurant dégage un bénéfice lorsque le coût de revient d'un repas est inférieur ou égal au prix du menu.

Graphiquement, on a : $f(x) \leq 16$ lorsque $x \geq 9\ 000$.

Le seuil de rentabilité du restaurant est égal à 9 000 repas.

4. a. Par définition, le bénéfice total annuel pour x repas est égal à la différence entre la recette annuelle et le coût total annuel.

$$\text{On a : } B(x) = 16x - g(x) = 16x - (9x + 63\ 000) = 7x - 63\ 000.$$

- b. L'inéquation qui permet de retrouver le seuil de rentabilité du restaurant est : $B(x) \geq 0$.

$$\text{On a : } B(x) \geq 0 \Leftrightarrow 7x - 63\ 000 \geq 0 \Leftrightarrow 7x \geq 63\ 000 \Leftrightarrow x \geq 9\ 000.$$

- c. L'objectif du restaurateur est de réaliser un bénéfice annuel de 35 000 € minimum.

$$\text{On a : } B(x) \geq 35\ 000 \Leftrightarrow 7x - 63\ 000 \geq 35\ 000 \Leftrightarrow 7x \geq 98\ 000 \Leftrightarrow x \geq 14\ 000.$$

$$\text{On a : } \frac{14\ 000}{300} \simeq 47.$$

Sachant que le restaurant est ouvert 300 jours dans l'année, il doit servir environ 47 repas par jour, en moyenne, au minimum par jour pour atteindre cet objectif.

EXERCICE 14

Un entreprise fabrique chaque semaine une quantité q , en tonnes, de produit chimique.

Elle produit entre 10 et 100 tonnes chaque semaine. Le coût total de q tonnes produites est donné par la fonction définie sur l'intervalle $[10 ; 100]$ par :

$$C(q) = 3q^2 + 40q + 2\,700$$

PARTIE A. COÛT MOYEN UNITAIRE

Le coût moyen unitaire est le coût moyen d'une tonne de produit lorsque q tonnes sont produites.

On appelle C_M la fonction représentant le coût moyen unitaire : $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

1. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10 ; 100]$: $C_M(q) = 3q + 40 + \frac{2\,700}{q}$.
2. Calculer $C'_M(q)$.
3. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10 ; 100]$: $C'_M(q) = \frac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]10 ; 100]$.
5. Quel est le coût moyen unitaire minimal? Pour quelle quantité de produit chimique est-il atteint?

PARTIE B. COÛT MARGINAL

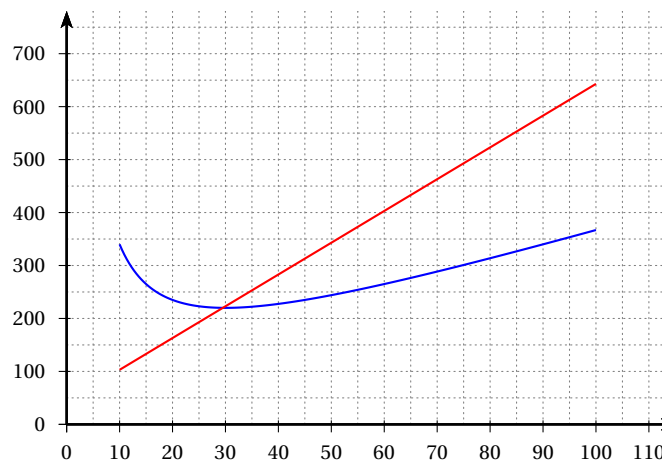
Le coût marginal est le supplément de coût engendré par la production d'une tonne de produit supplémentaire.

On appelle C_m la fonction représentant le coût moyen unitaire : $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.

1. Calculer $C_m(20)$. Interpréter ce résultat avec les données de l'énoncé.
2. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[10 ; 100]$: $C_m(q) = 6q + 43$.
3. Déterminer $C'(q)$. Quelle est la différence entre $C_m(q)$ et $C'(q)$?

PARTIE C. COMPARAISON DU COÛT MARGINAL ET DU COÛT MOYEN

La courbe $\mathcal{C}$ représentant le coût moyen et la droite $\mathcal{D}$ représentant le coût marginal sont représentées sur le graphique ci-dessous :



Une règle économique affirme que le coût moyen unitaire est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

Cette règle s'applique-t-elle ici?