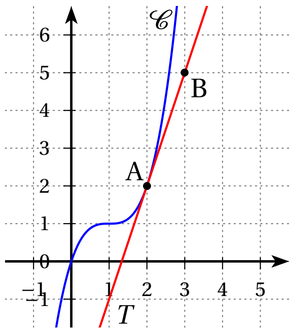
DÉRIVATION

EXERCICE 1

1. La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et l'abscisse de A est égale à 2.



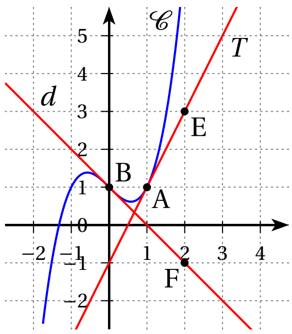
2. **a.** On a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-2}{3-2} = 3$.
Le coefficient directeur de la droite T est égal à 3.

b. Par définition, le nombre dérivé $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2. On a : $f'(2) = 3$.

EXERCICE 2

1. **a.** Le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 est le point A.

b. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1 est la droite T.



2. **a.** On a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \dfrac{3-1}{2-1} = 2$.
Le coefficient directeur de la droite T est bien égal à 2.

b. Par définition, le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1. On a : $f'(1) = 2$.

3. Par définition, le nombre dérivé $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente d à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 0.

On a : $f'(0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \dfrac{-1-1}{2-0} = -1$.

EXERCICE 3

1. $f_1(x) = 7$
   $f_1'(x) = 0$
2. $f_2(x) = 3x$
   $f_2'(x) = 3$
3. $f_3(x) = -7x + 1$
   $f_3'(x) = -7$
4. $f_4(x) = -x$
   $f_4'(x) = -1$
5. $f_5(x) = 5x + 1$
   $f_5'(x) = 5$
6. $f_6(x) = 3 - 2x$
   $f_6'(x) = -2$
7. $f_7(x) = -2x^2 + 3x - 17$
   $f_7'(x) = -4x + 3$
8. $f_8(x) = 12 + 6x^3$
   $f_8'(x) = 12x^2$
9. $f_9(x) = 7x^3 + 6 - 10x^2$
   $f_9'(x) = 21x^2 - 20x$

EXERCICE 4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	3	0	-1	-2	0
$f'(x)$	2	$2{,}5$	0	-3	-2	0	2

1. L'image de -2 par f est bien égale à 1.
2. Le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1 est plutôt égal à -2.
3. La pente de la tangente à C au point d'abscisse 2 est bien égale à 0.
4. Les tangentes à C aux points d'abscisses -3 et 2 ne sont pas parallèles car elles n'ont pas la même pente.
5. La tangente à C au point d'abscisse -1 est bien parallèle à l'axe des abscisses car sa pente est égale à 0.
6. L'équation réduite de la tangente à C au point d'abscisse 1 est plutôt $y = -2x + 1$.
7. La courbe C passe plutôt par le point de coordonnées $(2\,;\,-2)$.
8. Le nombre dérivé de f en -3 est bien égal à 2.
9. La tangente à C au point d'abscisse 0 a bien une pente négative, égale à -3.

EXERCICE 5

1. $f(x) = 3$
   $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^2$
   $f'(x) = 2x$
3. $f(x) = x^7$
   $f'(x) = 7x^6$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$
   $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
   $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$
7. $f(x) = -x^3 + 4x$
   $f'(x) = -3x^2 + 4$
8. $f(x) = (-2x + 1)(x + 1)$
   $f(x) = -2x^2 - x + 1$
   $f'(x) = -4x - 1$
9. $f(x) = (3x + 2)x^2$
   $f(x) = 3x^3 + 2x^2$
   $f'(x) = 9x^2 + 4x$

10. $f(x) = \dfrac{x+2}{3x}$

La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = 3x$.

On a : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 3$.

On a : $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{1 \times 3x - (x+2) \times 3}{(3x)^2} = \dfrac{-6}{9x^2} = -\dfrac{2}{3x^2}$.

11. $f(x) = \dfrac{-x^3+4x}{x}$

La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -x^3+4x$ et $v(x) = x$.

On a : $u'(x) = -3x^2+4$ et $v'(x) = 1$.

On a : $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{(-3x^2+4) \times x - (-x^3+4x) \times 1}{x^2} = \dfrac{-2x^3}{x^2} = -2x$.

On peut aussi remarquer que : $f(x) = -x^2+4$.

12. $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2}$

La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2-x+1$ et $v(x) = x^2$.

On a : $u'(x) = 2x-1$ et $v'(x) = 2x$.

On a : $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{(2x-1) \times x^2 - (x^2-x+1) \times 2x}{x^4} = \dfrac{x^2-2x}{x^4}$.

D'où : $f'(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$.

EXERCICE 6

1. $f_1(x) = 3\,\mathrm{e}^x$

La fonction f_1 est de la forme $k \times u$ avec $k = 3$ et $u(x) = \mathrm{e}^x$.

On a : $u'(x) = \mathrm{e}^x$.

On a : $f_1'(x) = k \times u'(x) = 3\,\mathrm{e}^x$.

2. $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x^2-3}$

La fonction f_2 est de la forme e^u avec $u(x) = 2x^2-3$.

On a : $u'(x) = 4x$.

On a : $f_2'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} = 4x\,\mathrm{e}^{2x^2-3}$.

3. $f_3(x) = -4\,\mathrm{e}^{3x-1}$

La fonction f_3 est de la forme $k \times \mathrm{e}^u$ avec $k = -4$ et $u(x) = 3x-1$.

On a : $u'(x) = 3$.

On a : $f_3'(x) = k \times u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} = -4 \times 3\,\mathrm{e}^{3x-1} = -12\,\mathrm{e}^{3x-1}$.

4. $f_4(x) = x\,\mathrm{e}^x$

La fonction f_4 est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

On a : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

On a : $f_4'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (1+x)\,\mathrm{e}^x$.

5. $f_5(x) = \ln(7x^2+6)$

   La fonction f_5 est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 7x^2+6$.

   On a : $u'(x) = 14x$.

   On a : $f_5'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{14x}{7x^2+6}$.

6. $f_6(x) = 4\ln(x^4+10)$

   La fonction f_6 est de la forme $k \times \ln(u)$ avec $k = 4$ et $u(x) = x^4+10$.

   On a : $u'(x) = 4x^3$.

   On a : $f_6'(x) = k \times \dfrac{u'(x)}{u(x)} = 4 \times \dfrac{4x^3}{x^4+10} = \dfrac{16x^3}{x^4+10}$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+6x-10$.

1. On a : $f'(x) = 2x+6$.
2. On a : $f'(x) = 0 \iff 2x+6 = 0 \iff x = -3$.

   Comme $a > 0$, alors le tableau de signes de $f'(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. D'après la question précédente :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-19	↗ $+\infty$

4. D'après la question précédente, la fonction f admet un minimum. Ce minimum est -19 atteint en -3.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3-6x^2+9x-10$.

1. On a : $f'(x) = 9x^2-12x+9$.
2. Soit Δ le discriminant du trinôme $9x^2-12x+9$.

   On a : $\Delta = b^2-4ac = (-12)^2-4\times 9\times 9 = -180$.

   Comme $a > 0$ et $\Delta < 0$, alors $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. Comme $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4. La fonction f n'admet aucun extremum.

EXERCICE 9

Par définition, le nombre dérivé de la fonction C en 200 est le coefficient directeur de la tangente T au point A d'abscisse 200.

On a : $C'(200) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{880-600}{200-0} = 1{,}4$.

Le coût marginal au rang 200 est environ égal à 1,40 €.

EXERCICE 10

1. On a : $B'(x) = -3x^2 + 120x - 525$.
2. On développe $(-3x+15)(x-35)$.

   On a : $(-3x+15)(x-35) = -3x^2 + 105x + 15x - 525 = -3x^2 + 120x - 525$.

   On a bien : $B'(x) = (-3x+15)(x-35)$.
3. Le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,45]$ dépend de celui de ses facteurs $-3x+15$ et $x-35$.

   On a : $-3x+15 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

   On a : $x - 35 = 0 \Leftrightarrow x = 35$.

x	0		5		35		45
$-3x+15$		+	0	−		−	
$x-35$		−		−	0	+	
$B'(x)$		−	0	+	0	−	

4. D'après la question précédente :

x	0	5	35	45
$B(x)$	0 ↘	−1 250	↗ 12 250 ↘	6 750

5. Le bénéfice du producteur est maximal lorsqu'il vend 35 kilogrammes de truffes. Ce bénéfice maximal s'élève à 12 250 €.

EXERCICE 11

Proposé en DM.

Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner une forme idéale pour réaliser des enrobages.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,12{,}5]$ par :

$$f(t) = 0{,}14t^3 - 3{,}15t^2 + 18{,}48t + 18$$

Lorsque t représente le temps, en minutes, on admet que $f(t)$ modélise la température, en degrés Celsius, du chocolat à l'instant t, au cours d'une opération de tempérage.

1. Pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,12{,}5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que :

$$f'(t) = 0{,}42(t-4)(t-11)$$

2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12{,}5]$.
3. Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?

EXERCICE 12

1. On a : $f(30) = \dfrac{8 \times 30^2 - 800 \times 30 + 30\,000}{30^2} \simeq 14{,}67$.

   Lorsque le véhicule roule à 30 km/h, sa consommation est environ égale à 14,67 L pour 100 km.

   On a : $f(50) = \dfrac{8 \times 50^2 - 800 \times 50 + 30\,000}{50^2} = 4$.

   Lorsque le véhicule roule à 50 km/h, sa consommation est égale à 4 L pour 100 km.

2. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 8x^2 - 800x + 30\,000$ et $v(x) = x^2$.

   On a : $u'(x) = 16x - 800$ et $v'(x) = 2x$.

   On a : $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{(16x - 800) \times x^2 - (8x^2 - 800x + 30\,000) \times 2x}{x^4}$.

   D'où : $f'(x) = \dfrac{800x^2 - 60\,000x}{x^4} = \dfrac{800x - 60\,000}{x^3}$.

3. Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $800x - 60\,000$, car, pour tout $x \in [30\ ;\ 130]$, $x^3 > 0$.

   On a : $800x - 60\,000 = 0 \iff x = 75$.

x	30		75		130
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	14,67	$\searrow$	2,67	$\nearrow$	3,62

4. D'après le tableau de variations de f, la consommation est minimale à 75 km/h et cette consommation minimale est environ égale à 2,67 L pour 100 km.

EXERCICE 13

1. **a.** La fonction f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

   On a : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

   On a : $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-0,5x^2} + 2x \times (-x\,\mathrm{e}^{-0,5x^2}) = (2 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

   b. Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $2 - 2x^2$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-0,5x^2} > 0$.

   Sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$: $2 - 2x^2 > 0 \iff -2x^2 > -2 \iff x^2 < 1 \iff x < 1$.

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1,21	$\searrow$	0,07

2. D'après le tableau de variations de f, le nombre maximal de lits occupés est environ égal à 1,21 million, atteint à 1 mois.

   L'affirmation du journal est exacte, à savoir que cet hiver le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million.