

CALCUL ALGÈBRIQUE ET ÉQUATIONS

EXERCICE 1

1. L'expression $2x^2 + 3x$ est la **somme** de $2x^2$ et de $3x$.
2. L'expression $(2x + 1)(5x - 3)$ est le **produit** de $2x + 1$ par $5x - 3$.
3. L'expression $2(4x - 1)$ est le **produit** de 2 par $4x - 1$.
4. L'expression $(x - 1)^2$ est le **produit** de $x - 1$ par lui-même.
5. L'expression $(x - 1)(2x - 1) + 5$ est la **somme** de $(x - 1)(2x - 1)$ et de 5.
6. L'expression $(2x + 1)^2 - 9$ est la **somme** de $(2x + 1)^2$ et de -9 .

EXERCICE 2

1. L'expression $x^2 - 6$ est la **différence** entre les termes x^2 et 6.
2. L'expression $2x^2 + 3x + 4$ est la **somme** des termes $2x^2$, $3x$ et 4.
3. L'expression $x(x + 1) + 4x$ est la **somme** des termes $x(x + 1)$ et $4x$.
4. L'expression $x^2 - (x + 4)^2$ est la **différence** entre les termes x^2 et $(x + 4)^2$.
5. L'expression $3x^2 + 6x + 9$ est la **somme** des termes $3x^2$, $6x$ et 9.
6. L'expression $(x + 4)^2 - 6$ est la **différence** entre les termes $(x + 4)^2$ et 6.

EXERCICE 3

1. $5x \times 7 = 35x$.
2. $7x \times 7x = 49x^2$.
3. $5x + 6x = 11x$.
4. $5x \times (-3x) = -15x^2$.
5. $-8x \times 2x = -16x^2$.
6. $-5x + (-3x) = -8x$.

EXERCICE 4

1. $7(3x + 5) = 21x + 35$.
2. $3x(7 - 9x) = 21x - 27x^2$.
3. $-2x(6x - 1) = -12x^2 + 2x$.
4. $(x + 5)(3x + 4) = 3x^2 + 4x + 15x + 20 = 3x^2 + 19x + 20$.
5. $(4x - 1)(x + 2) = 4x^2 + 8x - 1x - 2 = 4x^2 + 7x - 2$.
6. $(2x - 3)(x - 5) = 2x^2 - 10x - 3x + 15 = 2x^2 - 13x + 15$.

EXERCICE 5

1. Le terme en x^2 obtenu en développant $2x + (x - 2)^2$ est x^2 .
2. Le terme en x^2 obtenu en développant $(4x - 1)(x + 4)$ est $4x^2$.
3. Le terme en x^2 obtenu en développant $(2x + 1)^2 + (x - 1)^2$ est $(2x)^2 + x^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2$.

EXERCICE 6

1. Le terme constant obtenu en développant $x(3x + 4) + 5$ est 5.
2. Le terme constant obtenu en développant $(x - 3)^2$ est $3^2 = 9$.
3. Le terme constant obtenu en développant $(2x + 3)^2 - (x + 2)^2$ est $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$.

EXERCICE 7

1. $(x + 7)^2 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$.
2. $(x - 7)^2 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$.
3. $(x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$.
4. $(2x + 6)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 6 + 6^2 = 4x^2 + 24x + 36$.
5. $(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 - 30x + 25$.
6. $(4 - 3x)(4 + 3x) = 4^2 - (3x)^2 = 16 - 9x^2$.

EXERCICE 8

1. $(2x + \dots)^2 = 4x^2 + \dots + 9$
Comme 9 est le carré de 3, alors : $(2x + 3)^2 = 4x^2 + \dots + 9$.
Comme $2 \times 2x \times 3 = 12x$, alors : $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
2. $(x - \dots)^2 = x^2 - 6x + \dots$
Comme $6x = 2 \times x \times 3$, alors : $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + \dots$.
Comme $3^2 = 9$, alors : $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.
3. $(\dots + \dots) = 16x^2 + \dots + 25$
Comme $16x^2$ et 25 sont les carrés de $4x$ et de 5, alors : $(4x + 5)^2 = 16x^2 + \dots + 25$.
Comme $2 \times 4x \times 5 = 40x$, alors : $(4x + 5)^2 = 16x^2 + 40x + 25$.

EXERCICE 9

1. $2x^2 + 3x = x \times 2x + x \times 3 = x(2x + 3)$.
2. $xy + 4x = x \times y + x \times 4 = x(y + 4)$.
3. $xy + x = x \times y + x \times 1 = x(y + 1)$.
4. $4(x + 1) - x(x + 1) = (x + 1) \times 4 - (x + 1) \times x = (x + 1)(4 - x)$.
5. $10x^2 - 6x = 2x \times 5x - 2x \times 3 = 2x(5x - 3)$.
6. $(x + 1)^2 + x + 1 = (x + 1) \times (x + 1) + (x + 1) \times 1 = (x + 1)(x + 1 + 1) = (x + 1)(x + 2)$.

EXERCICE 10

- $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4).$
- $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2 = (2x+7)(2x-7).$
- $4x^2 - 4 = 4 \times x^2 - 4 \times 1 = 4(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1^2) = 4(x+1)(x-1).$
- $4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = (2x-5)^2.$
- $(x+4)^2 - 16 = (x+4)^2 - 4^2 = (x+4+4)(x+4-4) = (x+8)x = x(x+8).$
- $4x^2 + 4 + 8x = 4 \times x^2 + 4 \times 2x + 4 \times 1 = 4(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2) = 4(x+1)^2.$

EXERCICE 11

- $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 - 2 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$
- $9x - 3 = 0 \Leftrightarrow 9x = 0 + 3 \Leftrightarrow 9x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$
- $-6x + 5 = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 - 5 \Leftrightarrow -6x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}.$
- $4x + 2 = 2x + 6 \Leftrightarrow 4x - 2x = 6 - 2 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 2.$
- $3x - 5 = x + 4 \Leftrightarrow 3x - x = 4 + 5 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = 4,5.$
- $-2x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow -2x - x = -5 - 1 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x = 2.$

EXERCICE 12

- $(5x - 9)(-2x + 6) = 0 \Leftrightarrow 5x - 9 = 0$ ou $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$ ou $x = \frac{-6}{-2}.$

Les solutions de l'équation $(5x - 9)(-2x + 6) = 0$ sont les réels 1,8 et 3.

- $(6x + 3)(8x - 4) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3 = 0$ ou $8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{6}$ ou $x = \frac{4}{8}.$

Les solutions de l'équation $(6x + 3)(8x - 4) = 0$ sont les réels -0,5 et 0,5.

- $x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1.$

Les solutions de l'équation $x(x - 1) = 0$ sont les réels 0 et 1.

- Soit Δ le discriminant du trinôme $2x^2 - 10x + 8.$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 100 - 64 = 36.$

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation $2x^2 - 10x + 8 = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{10 - 6}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{10 + 6}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

- $4x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}.$

La solution de l'équation $4x^2 + 4x + 1 = 0$ est le réel -0,5.

- Soit Δ le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 4.$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12.$

Comme $\Delta < 0$, alors l'équation $x^2 + 2x + 4 = 0$ n'a pas de solution.

EXERCICE 13

1. $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0$ ou $x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$.

Les solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sont les réels -4 et 4 .

2. $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x \times x + x \times 3 = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$.

Les solutions de l'équation $x^2 + 3x = 0$ sont les réels -3 et 0 .

3. $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$.

Comme un carré est toujours positif et ne saurait être égal à -1 , alors l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.

4. $4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

La solution de l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$ est le réel $1,5$.

5. $x^2 = 10x - 16 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$.

Soit Δ le discriminant du trinôme $x^2 - 10x + 16$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 100 - 64 = 36$.

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation $x^2 - 10x + 16 = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{10 - 6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{10 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Les solutions de l'équation $x^2 = 10x - 16$ sont les réels 2 et 8 .

6. Soit Δ le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 6$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 6 = 4 - 24 = -20$.

Comme $\Delta < 0$, alors l'équation $x^2 + 2x + 6 = 0$ n'a pas de solution.

EXERCICE 14

On appelle x le nombre de femmes.

Puisqu'il y a trois fois plus d'hommes que de femmes, alors le nombre d'hommes est égal à $3x$.

Puisque l'entreprise occupe 320 personnes, alors : $x + 3x = 320$.

On a : $x + 3x = 320 \Leftrightarrow 4x = 320 \Leftrightarrow x = \frac{320}{4} \Leftrightarrow x = 80$.

On a : $3 \times 80 = 240$.

L'entreprise occupe 80 femmes et 240 hommes.

EXERCICE 15

On a : $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$ et $1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$.

Par conséquent, les autres dépenses de Monsieur Jean représentent sept vingtièmes de son salaire.

Soit x le salaire mensuel de Monsieur Jean.

On a : $\frac{7}{20} \times x = 378 \Leftrightarrow x = \frac{20}{7} \times 378 = \frac{20 \times 378}{7} = 1\,080$.

Le salaire mensuel de Monsieur Jean est égal à 1 080 euros.

EXERCICE 16

Soit x le tarif adulte.

D'après l'énoncé, le tarif enfant est égal à l'expression $x - 4$.

Les 100 adultes apportent une recette égale à l'expression $100x$.

Les 50 enfants apportent une recette égale à l'expression $50(x - 4)$.

Puisque la recette est de 1 300 euros, alors : $100x + 50(x - 4) = 1\,300$.

$$\text{On a : } 100x + 50x - 200 = 1\,300 \Leftrightarrow 150x = 1\,300 + 200 \Leftrightarrow 150x = 1\,500 \Leftrightarrow x = \frac{1\,500}{150} = 10.$$

$$\text{On a : } 10 - 4 = 6.$$

Le tarif adulte est égal à 10 euros et le tarif enfant est égal à 6 euros.

EXERCICE 17

Soit x le nombre initial d'étudiants et soit p leur participation individuelle.

$$\text{Puisque le groupe a loué le car pour 60 euros en tout, alors : } x \times p = 60 \Leftrightarrow p = \frac{60}{x}.$$

Puisque la participation individuelle augmente de 2,50 euros lorsqu'il y a 4 étudiants de moins, alors : $(x - 4)(p + 2,5) = 60$.

$$\text{On a : } x \times p + 2,5x - 4p - 10 = 60 \Leftrightarrow 60 + 2,5x - 4 \times \frac{60}{x} - 10 = 60 \Leftrightarrow 2,5x - \frac{240}{x} - 10 = 0.$$

$$\text{On a : } 2,5x - \frac{240}{x} - 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{2,5x^2 - 10x - 240}{x} = 0 \Leftrightarrow 2,5x^2 - 10x - 240 = 0.$$

Soit Δ le discriminant du trinôme $2,5x^2 - 10x - 240$.

$$\text{On a : } \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 2,5 \times (-240) = 2\,500.$$

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation $2,5x^2 - 10x - 240 = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{2\,500}}{2 \times 2,5} = \frac{10 - 50}{5} = -8$$

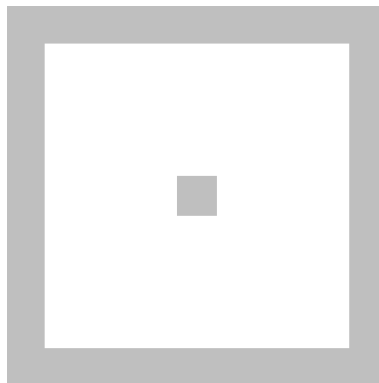
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{2\,500}}{2 \times 2,5} = \frac{10 + 50}{5} = 12$$

Le nombre d'étudiants étant un entier naturel, alors la solution x_1 n'est pas convenable

Il y a initialement 12 étudiants dans le groupe.

EXERCICE 18

Dans un carré de 10 cm de côté, on a grisé une bande de largeur x cm et un carré de côté x centré comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Déterminer pour quelle valeur de x l'aire de la partie grisée est égale à l'aire de la partie blanche.