CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Un groupe d'étudiants inscrits à l'option mathématiques appliquées aux sciences sociales est composé de 8 filles et 12 garçons.

   On a : $p = \dfrac{n_{\text{A}}}{n_{\text{E}}} = \dfrac{8}{8+12} = \dfrac{8}{20} = 0{,}40 = 40\ \%$.

   La proportion de filles dans le groupe est égale à 40 %.

2. Le maire d'une ville vient d'être réélu aux dernières élections municipales avec 19 800 voix, qui représentent 55 % des inscrits.

   On a : $n_{\text{E}} = \dfrac{n_{\text{A}}}{p} = \dfrac{19\,800}{0{,}55} = 36\,000$.

   Le nombre d'inscrits dans la ville est égal à 36 000.

3. Dans un train Paris-Toulouse, 40 % des voyageurs au départ de Paris vont jusqu'à Toulouse et parmi ceux-là, 15 % prennent ensuite une correspondance.

   On a : $p_{\text{A}\,|\,\text{E}} = p_{\text{A}\,|\,\text{B}} \times p_{\text{B}\,|\,\text{E}} = 0{,}15 \times 0{,}40 = 0{,}06 = 6\ \%$.

   La proportion de voyageurs qui prennent une correspondance à Toulouse dans le train au départ de Paris est égale à 6 %.

4. Un prix augmente de 13,2 % puis diminue de 10,9 %.

   On a : $1 + t_{\text{global}} = (1 + t_1) \times (1 + t_2) = (1 + 0{,}132) \times (1 - 0{,}109) = 1{,}132 \times 0{,}891 \simeq 1{,}0086$.

   Le pourcentage global d'augmentation, arrondi à 0,01 %, est environ égal à 0,86 %.

5. Une machine à laver est soldée à 20 %. Elle coûte alors 1 200 €.

   On a : $y_1 = \dfrac{y_2}{1+t} = \dfrac{1\,200}{1-0{,}20} = \dfrac{1\,200}{0{,}80} = 1\,500$.

   Son prix avant les soldes est égal à 1 500 €.

6. Le cours d'une action augmente de 10 % entre l'ouverture de la bourse et sa fermeture.

   On a : $y_1 = \dfrac{y_2}{1+t} = \dfrac{100}{1+0{,}10} = \dfrac{100}{1{,}10} \simeq 90{,}9$.

   En choisissant la fermeture de la bourse pour base 100, l'indice du cours de l'action à l'ouverture de la bourse est égal à 91 %.

EXERCICE 2

Voici les performances, en mètre, au lancer de javelot lors d'un championnat d'athlétisme.

32 ; 36 ; 36 ; 37 ; 37 ; 38 ; 39 ; 40
40 ; 40 ; 40 ; 41 ; 41 ; 42 ; 43 ; 43
43 ; 44 ; 45 ; 46 ; 46 ; 47 ; 47 ; 48

1. On a : $\overline{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{n} = \dfrac{1 \times 32 + 2 \times 36 + \ldots + 2 \times 47 + 1 \times 48}{24} = \dfrac{991}{24} \simeq 41{,}29$.

   Le lancer moyen est environ égal à 41,29 mètres.

2. On a : $V = \dfrac{\sum n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2 = \dfrac{1 \times 32^2 + \ldots + 1 \times 48^2}{24} - \left(\dfrac{991}{24}\right)^2 \simeq \dfrac{41\,307}{24} - 41{,}29^2 \simeq 16{,}12$.

   La variance de la série est environ égale à 16,12.

   On a : $\sigma = \sqrt{V} \simeq \sqrt{16{,}12} \simeq 4{,}02$.

   L'écart-type de la série est environ égal à 4,02 mètres.

3. Puisque $n = 24$ est pair, alors la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 12 et 13.

   On a : $\mathrm{Me} = \dfrac{a_{12} + a_{13}}{2} = \dfrac{41 + 41}{2} = 41$.

   Le lancer médian est égal à 41 mètres.

4. Il y a 6 lancers dont la longueur est inférieure ou égale à 38 mètres.

   On a : $p = \dfrac{n_\mathrm{A}}{n_\mathrm{E}} = \dfrac{6}{24} = 0{,}25 = 25\ \%$.

   25 % des lancers ont une longueur inférieure ou égale à 38 mètres.

5. On a : 25 % de $n = \dfrac{1}{4} \times 24 = 6$.

   Donc le premier quartile Q_1 est la valeur de rang 6.

   On a : $\mathrm{Q}_1 = a_6 = 38$.

   Au moins 25 % des lancers ont une longueur inférieure ou égale à 38 mètres.

6. On a : 75 % de $n = \dfrac{3}{4} \times 24 = 18$.

   Donc le troisième quartile Q_3 est la valeur de rang 18.

   On a : $\mathrm{Q}_3 = a_{18} = 44$.

   Au moins 75 % des lancers ont une longueur inférieure ou égale à 44 mètres.

EXERCICE 3

La tableau suivant donne l'évolution du nombre d'habitants d'un village entre les années 2015 et 2020. Les relevés de population sont effectués chaque année au 1er janvier.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Nombre d'habitants	873	1 025	1 010	1 121	1 289	1 456

PARTIE A. PREMIÈRE ÉTUDE

1. On a : $t_\text{global} = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1} = \dfrac{1\,456 - 873}{873} \simeq 0{,}668 = 66{,}8\ \%$.

   Entre les années 2015 et 2020, le taux d'évolution global est environ égal à 66,8 %.

2. On a : $1 + t_\text{annuel} = \left(1 + t_\text{global}\right)^{\frac{1}{n}} \simeq 1{,}668^{\frac{1}{5}} \simeq 1{,}108$.

   Entre les années 2015 et 2020, le taux d'évolution annuel moyen est environ égal à 10,8 %.

3. On a : $y_2 = (1 + t_\text{annuel})^2 \times y_1 \simeq 1{,}108^2 \times 1\,456 \simeq 1\,787$.

   Le 1er janvier 2022, ce village comptera environ 1 787 habitants.

PARTIE B. SECONDE ÉTUDE

Dans cette partie, on suppose que la population du village après 2020 augmentera régulièrement de 6 % par an.

Soit (u_n) la suite dont le terme général u_n représente le nombre d'habitants de ce village, arrondi à l'unité près, l'année $2020+n$. Ainsi, on a : $u_0 = 1\,456$.

1. Chaque année après 2020, la population du village augmente de 6 %.

   Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1{,}06 \times u_n$.

   Par définition, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,06.
2. Par propriété d'une suite géométrique, on a : $u_n = q^n \times u_0 = 1{,}06^n \times 1\,456$.
3. On a : $u_4 = 1{,}06^4 \times 1\,456 \simeq 1\,838$.

   Le nombre 1 838 représente la population estimée de ce village en 2024.
4. En 2026 : $n = 6$ et $u_6 = 1{,}06^6 \times 1\,456 \simeq 2\,065$.

   En 2026, il y a environ 2 065 habitants dans ce village.
5. On a : $u_{12} = 1{,}06^{12} \times 1\,456 \simeq 2\,930$ et $u_{13} = 1{,}06^{13} \times 1\,456 \simeq 3\,106$.

   En outre, la suite géométrique (u_n) est une suite croissante car $q > 1$.

   Selon ce modèle, ce village comptera au moins 3 000 habitants en 2033.

EXERCICE 4

Un traiteur prépare et vend jusqu'à 15 kilogrammes de saumon fumé en un mois.

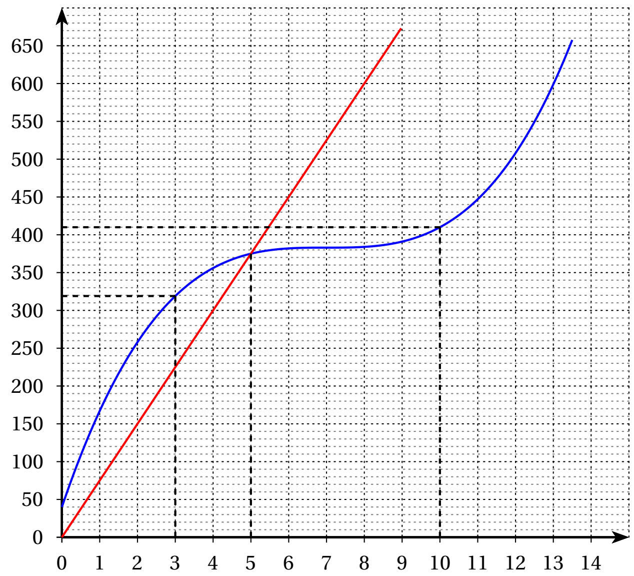
On note x le nombre de kilogrammes de saumon fumé préparé et vendu en un mois.

Le montant des charges correspondant à la préparation de x kilogrammes de saumon fumé, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ par :

$$C(x) = x^3 - 21x^2 + 147x + 40$$

Le traiteur vend son saumon fumé 75 euros le kilogramme.

PARTIE A. ÉTUDE GRAPHIQUE



1. **a.** Graphiquement, une préparation de 3 kilogrammes de saumon coûte environ 320 €.
   b. Graphiquement, un montant des charges de 410 euros correspond à une préparation d'environ 10 kilogrammes de saumon.
2. **a.** Chaque kilogramme de saumon est vendu 75 € donc, par proportionnalité entre le nombre de kilogrammes et le prix, on a : $R(x) = 75x$.
   b. La droite des recettes passe par les points de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $(1\,;\,75)$.
   c. Graphiquement, le traiteur doit vendre plus de 5 kilogrammes de saumon pour réaliser un bénéfice.

PARTIE B. ÉTUDE ALGÉBRIQUE

1. On a :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 75x - (x^3 - 21x^2 + 147x + 40) \\ &= 75x - x^3 + 21x^2 - 147x - 40 \\ &= -x^3 + 21x^2 - 72x - 40 \end{aligned}$$

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   a. On a : $B'(x) = -3x^2 + 42x - 72$.
   b. On développe $-3(x-2)(x-12)$.

$$\begin{aligned} -3(x-2)(x-12) &= -3(x^2 - 12x - 2x + 24) \\ &= -3(x^2 - 14x + 24) \\ &= -3x^2 + 42x - 72 \\ &= B'(x) \end{aligned}$$

   On a bien : $B'(x) = -3(x-2)(x-12)$.
   c. Tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,15]$:

x	0		2		12		15
-3		$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	-40	↘	-108	↗	392	↘	230

   d. D'après le tableau de variations de la fonction B, le traiteur doit vendre 12 kilogrammes de saumon pour réaliser un bénéfice maximal.
   Le bénéfice maximal est égal à 392 €.

EXERCICE 5

Pour connaître la fréquentation d'un restaurant gastronomique, une enquête a été menée auprès des habitants de la commune dans laquelle il se trouve. La répartition des personnes interrogées est la suivante :

- 10 % ont moins de 30 ans ;
- 40 % ont entre 30 et 50 ans ;
- 50 % ont plus de 50 ans.

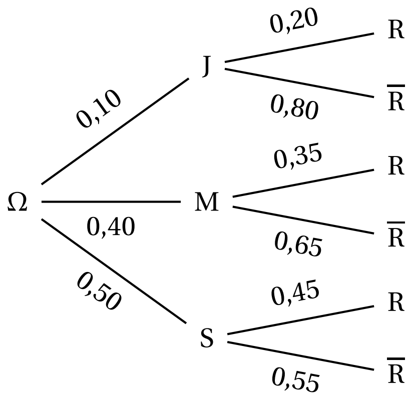
A la question : « Avez-vous déjà mangé dans ce restaurant ? » :

- 20 % des moins de 30 ans ont répondu « oui » ;
- 35 % des personnes âgées entre 30 et 50 ans ont répondu « oui » ;
- 45 % des plus de 50 ans ont répondu « oui ».

On prend au hasard l'une des réponses de cette enquête et on note :

- J l'événement : « La personne interrogée a moins de 30 ans » ;
- M l'événement : « La personne interrogée a un âge compris entre 30 et 50 ans » ;
- S l'événement : « La personne interrogée a plus de 50 ans » ;
- R l'événement : « La personne interrogée a déjà mangé dans ce restaurant ».

1. Arbre de probabilités :



2. **a.** L'événement $\text{J} \cap \text{R}$ est l'événement : « La personne interrogée a moins de 30 ans et a déjà mangé dans ce restaurant ».

On a : $p(\text{J} \cap \text{R}) = p(\text{J}) \times p_{\text{J}}(\text{R}) = 0{,}10 \times 0{,}20 = 0{,}02$.

b. On cherche $p(\text{M} \cap \text{R})$.

On a : $p(\text{M} \cap \text{R}) = p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{R}) = 0{,}40 \times 0{,}35 = 0{,}14$.

3. On a :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(\text{J} \cap \text{R}) + p(\text{M} \cap \text{R}) + p(\text{S} \cap \text{R}) \\ &= p(\text{J}) \times p_{\text{J}}(\text{R}) + p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{R}) + p(\text{S}) \times p_{\text{S}}(\text{R}) \\ &= 0{,}10 \times 0{,}20 + 0{,}40 \times 0{,}35 + 0{,}50 \times 0{,}45 \\ &= 0{,}02 + 0{,}14 + 0{,}225 = 0{,}385 \end{aligned}$$

4. On cherche $p_{\text{R}}(\text{J})$.

On a : $p_{\text{R}}(\text{J}) = \dfrac{p(\text{J} \cap \text{R})}{p(R)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}385} \simeq 0{,}0519 \simeq 5{,}2\ \%$.