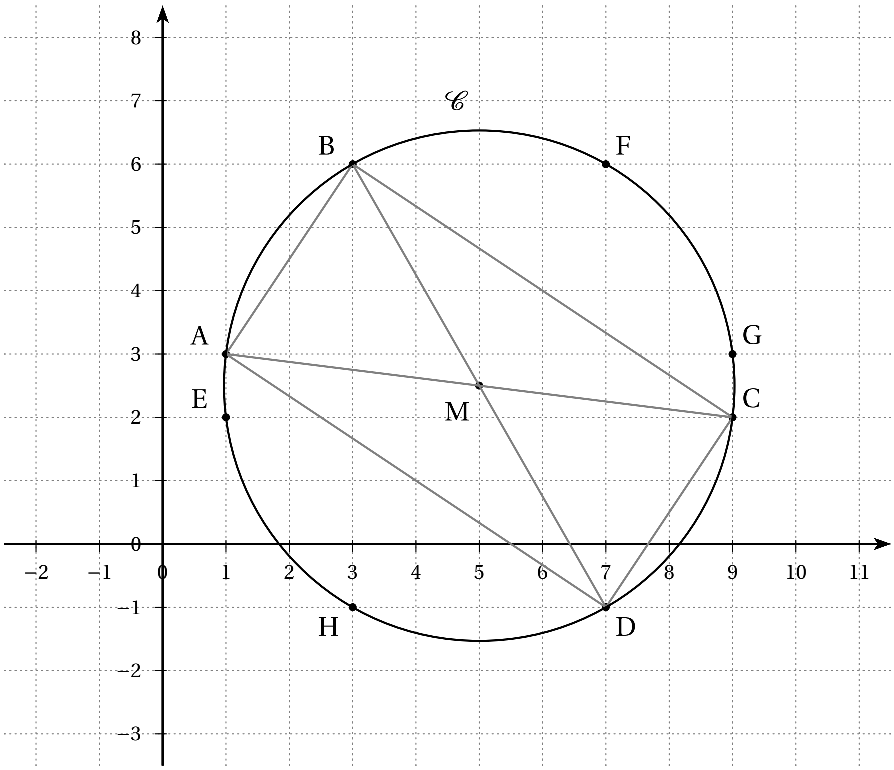
GÉOMÉTRIE

(SUJET DE SECOURS)



1. On a : A (1 ; 3), B (3 ; 6) et C (9 ; 2).
2. On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{13}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(9-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{65}$$
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(9-3)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{52}$$

3. On a : $AC^2 = 65$.

   On a : $AB^2 + BC^2 = 13 + 52 = 65$.

   Puisque $AC^2 = AB^2 + BC^2$, alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.
4. On a :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$$
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

5. Le point D est tel que M est le milieu du segment [BD].

6. On a :

$$\frac{x_D + x_B}{2} = x_M \Leftrightarrow \frac{x_D + 3}{2} = 5 \Leftrightarrow x_D + 3 = 10 \Leftrightarrow x_D = 7$$
$$\frac{y_D + y_B}{2} = y_M \Leftrightarrow \frac{y_D + 6}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow y_D + 6 = 5 \Leftrightarrow y_D = -1$$

7. Par construction, les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu, donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

   De plus, le parallélogramme ABCD possède un angle droit, donc ABCD est un rectangle.

8. Puisque le triangle ABC est rectangle en B, alors le centre de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$ est le milieu M de l'hypoténuse [AC].

9. Le rayon r de ce cercle est $r = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

10. Les 8 points à coordonnées entières sur le cercle $\mathscr{C}$ sont A, B, C, D, E (1 ; 2), F (7 ; 6), G (9 ; 3) et H (3 ; −1).