PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG

PARTIE A. MODÉLISATION MATHÉMATIQUES

1. Miser 9 fois nécessite 511 € et miser 10 fois nécessite 1 023 € :

$$1+2+4+8+16+32+64+128+256=511$$
$$1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1\,023$$

Donc le nombre de mises n que lui permet une fortune de 1 000 € est bien égal à 9.

2. Par le principe multiplicatif, on a :

$$p(\text{A}_9)=\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}\simeq 0{,}002\simeq 0{,}2\ \%$$

Les événements A_9 et G sont complémentaires donc, on a :

$$p(\text{G})=1-p(\text{A}_9)=1-\frac{1}{512}=\frac{511}{512}\simeq 0{,}998\simeq 99{,}8\ \%$$

3. Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

Rang du premier FACE : k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilité : $p(X=k)$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

En notant S la somme des probabilités, on a bien $S=1$:

$$S=\frac{1}{512}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}$$
$$S=\frac{1}{512}+\frac{256}{512}+\frac{128}{512}+\frac{64}{512}+\frac{32}{512}+\frac{16}{512}+\frac{8}{512}+\frac{4}{512}+\frac{2}{512}+\frac{1}{512}$$
$$S=\frac{512}{512}=1$$

4. a. On a vu que lorsque le joueur avait misé 9 fois sans obtenir FACE, il avait perdu 511 €.

Si le joueur obtient FACE au 1$^{\text{er}}$ coup :

il aura misé 1 € pour récupérer 2 € et aura gagné 1 €.

Si le joueur obtient FACE au 2$^{\text{ème}}$ coup :

il aura misé $1+2=3$ € pour récupérer 4 € et aura gagné 1 €.

Si le joueur obtient FACE au 3$^{\text{ème}}$ coup :

il aura misé $3+4=7$ € pour récupérer 8 € et aura gagné 1 €.

Si le joueur obtient FACE au 4$^{\text{ème}}$ coup :

il aura misé $7+8=15$ € pour récupérer 16 € et aura gagné 1 €.

Si le joueur obtient FACE au 5$^{\text{ème}}$ coup :

il aura misé $15+16=31$ € pour récupérer 32 € et aura gagné 1 €.

Et ainsi de suite...

La variable aléatoire Y prend bien ses valeurs dans $\{-511\ ;\ +1\}$.

b. Loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Gain algébrique en euros : g	-511	$+1$
Probabilité : $p(Y=g)$	$\dfrac{1}{512}$	$\dfrac{511}{512}$

c. L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{512} \times (-511) + \frac{511}{512} \times (+1) = -\frac{511}{512} + \frac{511}{512} = 0$$

PARTIE B. SIMULATION DE 1 000 PARTIES EN 9 COUPS AU PLUS SUR UN TABLEUR

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	…
1	1									GAGNÉ	4	…
2	0	1								GAGNÉ		…
3	1									GAGNÉ		…
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	GAGNÉ		…
5	1									GAGNÉ		…
6	1									GAGNÉ		…
7	0	0	1							GAGNÉ		…
8	1									GAGNÉ		…
9	1									GAGNÉ		…
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	PERDU		…
11	0	1								GAGNÉ		…
12	1									GAGNÉ		…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Quelques explications :

- Si une ligne contient le chiffre **1**, la partie s'arrête, elle est gagnée au bout d'un nombre de coup égal au numéro de colonne.
- Si une ligne ne contient que le chiffre **0**, la partie est perdue.
- La cellule **K1** compte le nombre parties perdues sur les 1 000 parties.

PARTIE C. LE PARADOXE

1. On suppose que 4 parties sont perdues.

   Par conséquent, 996 parties sont gagnées.

   En perdant 4 parties, le joueur aura perdu 4 × 511 €, soit 2 044 €.

   En gagnant 996 parties, le joueur aura gagné 996 × 1 €, soit 996 €.

   Au bout du compte et sur les 1 000 parties, le joueur aura perdu 2 044 – 996 €, soit 1 048 €.

2. Le paradoxe réside dans le fait que ce jeu est équitable et qu'il comporte des risques.