FONCTION ET ÉPIDÉMIE

PROBLÈME

Un virus affecte la population d'une ville. On s'intéresse à la progression de son épidémie en fonction du temps.

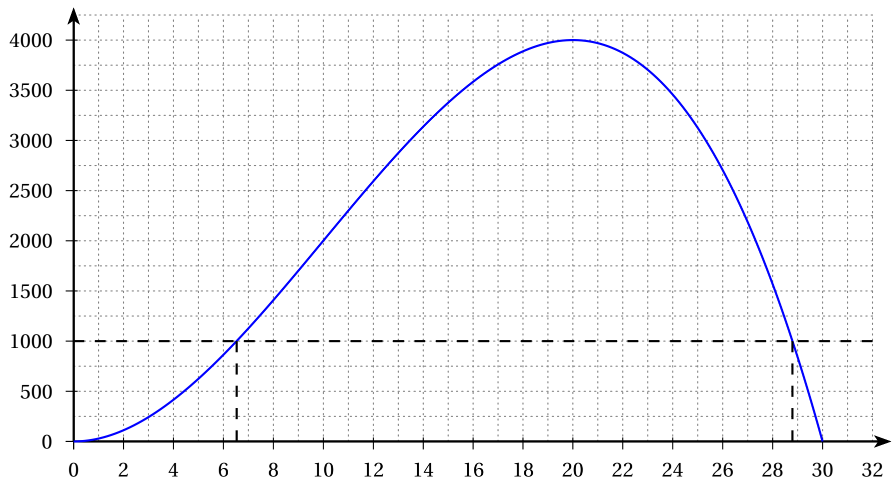
On suppose que cette progression est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 30x^2$$

où $f(x)$ représente le nombre d'individus infectés par le virus au bout de x jours.

On note $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,30]$.

La courbe ci-dessous représente la fonction f sur sur l'intervalle $[0\,;\,30]$.



1. On a : $f'(x) = -3x^2 + 60x = -3x(x-20)$ en factorisant par $-3x$.
2. On étudie le signe de $-3x$ et de $x-20$ sur l'intervalle $[0\,;\,30]$.

$$-3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \text{et} \qquad x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

x	0		20		30
$-3x$	0	$-$		$-$	
$x-20$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. Tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,30]$.

x	0		20		30
$f(x)$	0	$\nearrow$	4 000	$\searrow$	0

4. D'après le tableau de variations de la fonction f, le pic de l'épidémie est égal à 4 000.
5. D'après le tableau de variations de la fonction f, ce pic est atteint au bout de 20 jours.
6. On a : 25 % de 4 000 = 0,25 × 4 000 = 1 000.

   Graphiquement, le nombre d'individus infectés par le virus est supérieur ou égal 1 000 entre le 7ème jour et le 28ème jour, c'est à dire pendant 22 jours.
7. Par définition, le nombre dérivé $f'(x)$ est égal à la limite du taux d'accroissement de la fonction f entre x et $x+h$ lorsque h tend vers 0.

   Puisque $f'(12) > f'(18) > f'(20)$, alors, entre le 12ème jour et le 20ème jour, le taux d'accroissement du nombre d'individus infectés par le virus baisse.
8. C'est le 10ème jour que le taux d'accroissement du nombre d'individus infectés par le virus est maximal.

   On peut le voir de deux manières :
   - en calculant pas à pas $f(x) - f(x-1)$, c'est à dire le nombre supplémentaire d'individus infectés de jours en jours;
   - en calculant pas à pas $f'(x)$, c'est à dire le taux d'accroissement du nombre d'individus infectés de jours en jours.

x	$f(x)$	$f(x)-f(x-1)$	$f'(x)$
0	0		0
1	29	29	57
2	112	83	108
3	243	131	153
4	416	173	192
5	625	209	225
6	864	239	252
7	1 127	263	273
8	1 408	281	288
9	1 701	293	297
10	**2 000**	**299**	**300**
11	2 299	299	297
12	2 592	293	288
13	2 873	281	273
14	3 136	263	252
15	3 375	239	225
16	3 584	209	192
17	3 757	173	153
18	3 888	131	108
19	3 971	83	57
20	4 000	29	0

Une remarque à méditer : La fonction f' décroit lorsque sa dérivée f'' s'annule.