FONCTIONS POLYNÔMES

EXERCICE 1

Pour chaque fonction, indiquer le sommet et l'axe de symétrie de sa courbe $\mathscr{C}$, puis les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, s'ils existent.

1. $x \mapsto 2x^2 - 10$ **2.** $x \mapsto -x^2 - 4$ **3.** $x \mapsto \dfrac{1}{4}x^2 - 1$ **4.** $x \mapsto x^2 - 121$

EXERCICE 2

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x^2 - 4x$.

1. Factoriser $x^2 - 4x$.
2. En déduire les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
3. Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathscr{C}$.
4. Préciser l'allure de $\mathscr{C}$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)(x+7)$.

1. Donner le nom de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation y = f(x) et son allure.
2. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et en donner une interprétation graphique.
3. Déterminer les coordonnées du sommet S de la courbe $\mathscr{C}$.
4. Étudier le signe de $f(x)$ dans un tableau de signes, ou à l'aide de l'allure de la parabole et des intersections avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 4

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer son sens de variations.

1. $x \mapsto 2x^3$ **2.** $x \mapsto -0{,}1x^3$ **3.** $x \mapsto 0{,}5x^3 - 4$ **4.** $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 + 9$

EXERCICE 5

Étudier la fonction $f : x \mapsto -(x+2)(2x+1)$ en suivant les étapes vues à l'**exercice 3**.

EXERCICE 6

Étudier la fonction $g : t \mapsto 0{,}5(t+10)(2t-8)$ en suivant les étapes vues à l'**exercice 3**.

EXERCICE 7

L'énergie cinétique, en joules, est donnée par $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2} m \times v^2$ où m est la masse en kg et v la vitesse en m/s.

1. **a.** Expliquer pourquoi, à vitesse constante, l'énergie cinétique est proportionnelle à la masse. Est-elle proportionnelle à la vitesse ?

   b. A masse m constante, on augmente la vitesse v de une unité (1 m/s). Déterminer le taux de variation de l'énergie cinétique.

2. **a.** Déterminer la vitesse, en mètre par seconde, pour une masse de 80 kg et une énergie cinétique de 100 joules.

   b. Déterminer la masse d'un objet lancé à une vitesse de 3 m/s et ayant une énergie cinétique de 207 joules.

EXERCICE 8

L'offre et la demande de poulets « label » sur un marché en gros sont modélisées par :

$$f(x) = 0{,}1x^3 + 5 \text{ et } g(x) = -0{,}05x^3 + 30$$

pour un prix x variant de 3 à 6 €/kg.

Les quantités échangées sur ce marché, $f(x)$ et $g(x)$, sont en tonnes.

1. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g sur l'intervalle $[3 ; 6]$.
2. **a.** Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Arrondir le résultat à 0,01 près.

   b. En donner une signification concrète.

   c. Calculer la quantité de volailles échangées au prix d'équilibre, à 100 kg près.

   d. Calculer le chiffre d'affaires engendré par la vente de ces volailles au prix du marché.

EXERCICE 9

Le volume d'une sphère de rayon R est donné par la formule $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

1. **a.** Calculer le volume pour un rayon de 10 cm.

   b. Si le rayon augmente de 20 %, calculer le taux d'évolution du volume, l'exprimer en pourcentage.

2. **a.** Résoudre l'équation $(1+t)^3 = 1{,}728$.

   b. Donner une signification à la solution de cette équation, liée au volume de la sphère.

3. Déterminer le taux d'évolution du rayon qui engendre un doublement du volume de la sphère.

   On montrera que cela revient à résoudre l'équation : $(1+t)^3 = 2$.

EXERCICE 10

On considère le polynôme de degré 3 : $P(x) = (x+1)(x-5)(x-2)$.

1. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
2. Placer les racines de $P(x)$ sur un axe.
3. Dresser le tableau de signes de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 11

1. Étudier le signe de $P(x) = 2x(x+5)(3x-1)$ à l'aide d'un tableau de signes.

   Vérifier l'alternance des + et − pour le signe de $P(x)$
2. Appliquer cette alternance pour obtenir le signe de $Q(x) = (-2x+1)(x+2)(x-4)$.
3. Même question pour obtenir le signe de $R(x) = (3x-1)(-x+5)(2-x)$.

EXERCICE 12

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

1. Sur l'écran d'une calculatrice, visualiser la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.
2. Factoriser $P(x)$ au maximum.

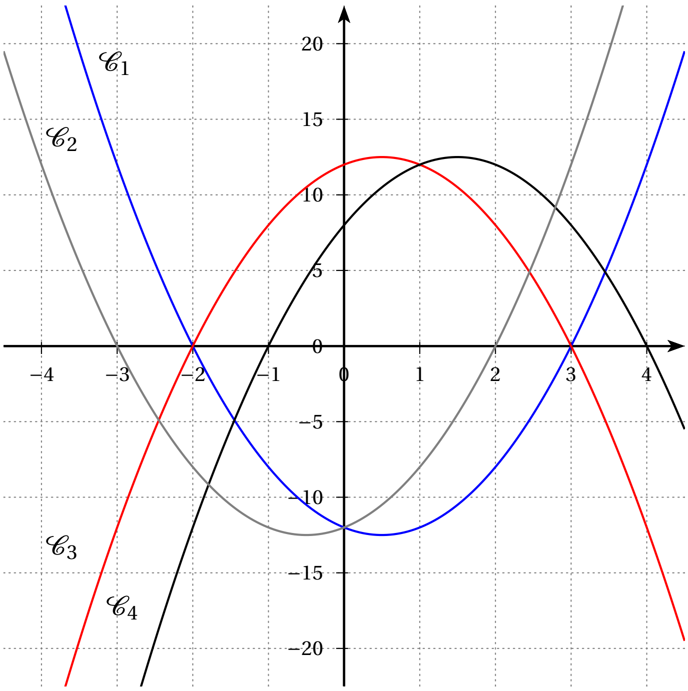
EXERCICE 13

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 12$$

1. Montrer que 3 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
2. Montrer que −2 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner la forme factorisée de $f(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$.
5. Parmi les quatre courbes suivantes, indiquer celle de la fonction f.

   Justifier la réponse.



EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$$

1. **a.** Visualiser le courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'écran d'une calculatrice.
   b. En déduire les racines de f(x) et sa factorisation.
2. **a.** Résoudre l'équation $f(x) = 2x - 8$.
   b. Soit $\mathscr{D}$ la courbe d'équation $y = 2x - 8$.
   Interpréter graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2x - 8$.

EXERCICE 15

Un plongeur effectue un saut depuis un falaise située en bord de mer.

L'altitude du pied du plongeur, en mètre, en fonction du temps écoulé depuis le déclenchement du saut t, en seconde, est modélisée par la fonction f définie par :

$$f(t) = -0{,}5t^2 + t + 4$$

1. A quelle altitude se trouve la falaise? Justifier la réponse.
2. Calculer $f(1)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Montrer que : $f(t) = -0{,}5(t+2)(t-4)$.
4. Dresser le tableau de signes la fonction f.
5. Au bout de combien de secondes le pied du plongeur atteint-il la mer?
   Justifier la réponse.
6. Question subsidiaire : quelle est la hauteur maximale atteinte par le pied du plongeur?

EXERCICE 16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

1. Montrer que le nombre -1 est une racine de la fonction f.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) = 3(x+1)(x-3)$.
3. Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
4. Faire un schéma à main levée de la courbe représentative de la fonction f.
5. Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.
6. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
7. Expliquer pourquoi le minimum de la fonction f est atteint en 1.
8. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 17

Un restaurateur conçoit entre 10 et 80 repas.

Le coût de conception de x repas, en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[10\ ;\ 80]$ par :

$$C(x) = 2x^2 - 160x + 3\,200$$

1. Calculer le coût de conception de 50 repas.
2. On suppose qu'un repas est facturé 40 euros.

   Montrer que le bénéfice $B(x)$, en euros, réalisé par la vente de x repas, est donné par :

   $$B(x) = -2x^2 + 200x - 3\,200$$

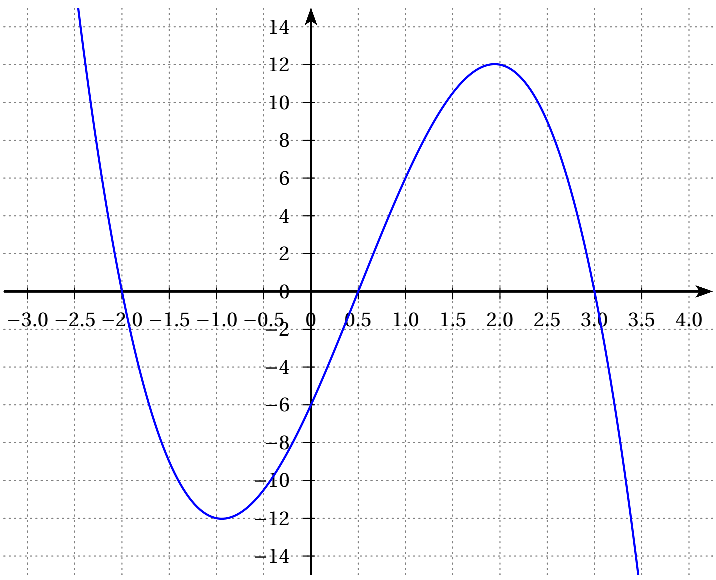
3. Montrer que pour tout $x \in [10\ ;\ 80]$, on a : $B(x) = -2(x-20)(x-80)$.
4. Déterminer le tableau de signes de $B(x)$ sur l'intervalle $[10\ ;\ 80]$.
5. Combien de repas le restaurateur doit-il concevoir et vendre pour réaliser un bénéfice ?
6. Déterminer le nombre de repas à concevoir et à vendre pour que le bénéfice soit maximal.

EXERCICE 18

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2{,}5\ ;\ 3{,}5]$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$$

La fonction f est représentée sur le graphique ci-dessous.



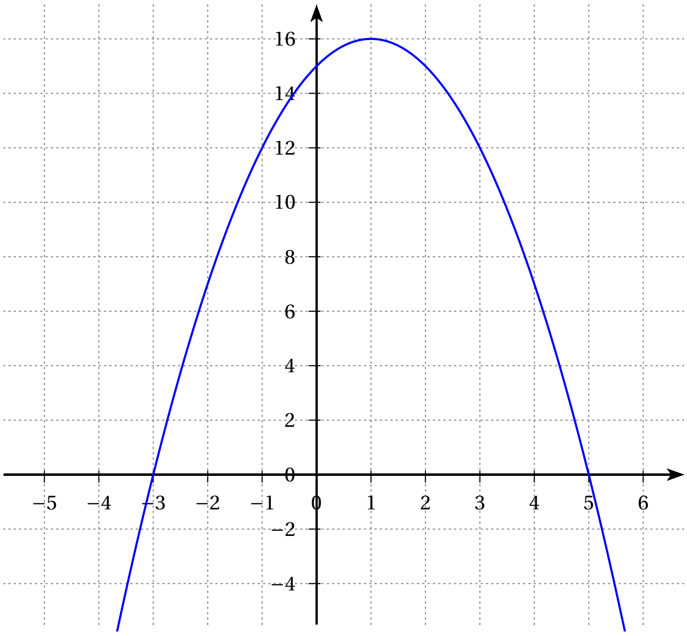
1. Déterminer graphiquement $f(1{,}5)$.
2. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -6$.
3. Calculer $f(1)$.
4. Vérifier que, pour tout réel $x \in [-2{,}5\ ;\ 3{,}5]$, on a : $f(x) = (1-2x)(x^2 - x - 6)$.
5. On admet que $f(x) = (1-2x)(x-3)(x+2)$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
6. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[-2{,}5\ ;\ 3{,}5]$.

EXERCICE 19

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 15$$

La fonction f est représentée sur le graphique ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$.
3. Déterminer graphiquement les coordonnées du sommet S de la courbe de f.
4. En déduire une équation de l'axe de symétrie de la courbe de f.
5. Donner la forme factorisée de $f(x)$.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$.
7. Résoudre l'inéquation : $-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$.