DÉRIVATION

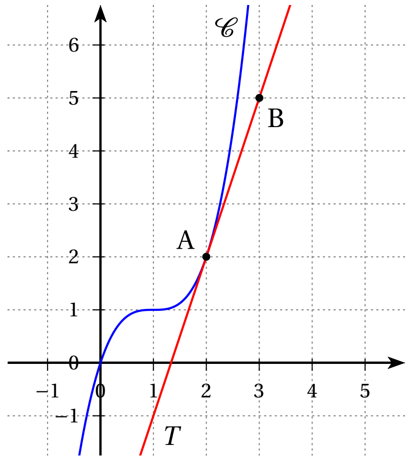
EXERCICE 1

1. Placer dans un repère les trois points A (−4 ; 2), B (0 ; 5) et C (2 ; −2).
2. Calculer le coefficient directeur des droites (AB), (AC) et (BC).

EXERCICE 2

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

La droite T est une tangente à la courbe $\mathscr{C}$.



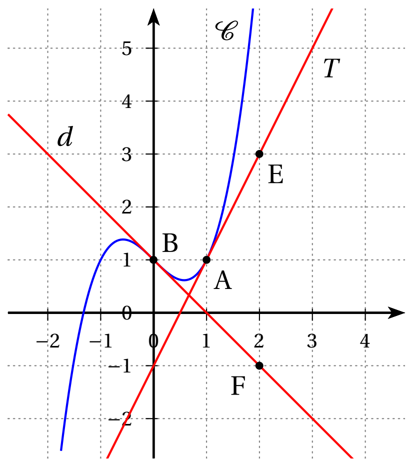
1. Préciser l'abscisse du point où T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$.
2. **a.** Par lecture graphique, déterminer le coefficient directeur de la droite T.

   b. Quel nombre dérivé peut-on en déduire ? Quelle est sa valeur ?

EXERCICE 3

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Les droites T et d sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$.



1. **a.** Quel est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 ?

   b. Quelle droite est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 ?
2. **a.** Justifier que le coefficient directeur de la droite T est égal à 2.

   b. Quel nombre dérivé peut-on en déduire ? Quelle est sa valeur ?
3. Calculer $f'(0)$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. **a.** Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$ pour un réel h non nul.
   Rappel : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

   b. En déduire que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est égal à $4+h$.
2. Montrer que la fonction f est dérivable en 1 et donner la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.

EXERCICE 5

Dans chaque cas, on considère l'expression $f(x)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer alors l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée f'.

1. $f(x) = 7$.
2. $f(x) = 3x$.
3. $f(x) = -7x + 1$.
4. $f(x) = -x$.
5. $f(x) = 5x + 1$.
6. $f(x) = 3 - 2x$.
7. $f(x) = 17x - 3$.
8. $f(x) = x + 1$.
9. $f(x) = 5 - x$.
10. $f(x) = x^2 + x$.
11. $f(x) = 9x^2$.
12. $f(x) = -4x^2$.
13. $f(x) = x^3 - 3$.
14. $f(x) = 1 + x^3$.
15. $f(x) = x^3 - x$.
16. $f(x) = x^3 - x^2$.
17. $f(x) = 2x^3$.
18. $f(x) = -5x^3$.
19. $f(x) = 5x^2 - x$.
20. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
21. $f(x) = -1 + 2x + x^2$.
22. $f(x) = x^3 + 7x + 1$.
23. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$.
24. $f(x) = 5 - 2x^3$.

EXERCICE 6

Un tonneau de vin de 100 litres se vide en 10 minutes.

A l'instant t, exprimé en minutes, la quantité de vin déjà vidée est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par l'expression :

$$f(t) = 20t - t^2$$

Le débit à l'instant t, exprimé en litres par minutes, est $f'(t)$.

1. Calculer $f'(t)$.

2. En déduire le débit de vin à l'instant $t = 5$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 10x + 3$.

2. Calculer le nombre dérivé de f en 2. En déduire le coefficient directeur de la droite T.

3. Calculer $f(2)$. En déduire les coordonnées du point A.

4. Parmi les équations ci-dessous, laquelle est une équation de T ?

a. $y = 23x + 27$ **b.** $y = 23x - 19$ **c.** $y = 23x$

EXERCICE 8

Une fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ 7]$ et son tableau de variations est donné ci-dessous.

x	1		3		7
$f(x)$	-2	$\nearrow$	10	$\searrow$	0

Quel est le signe de la dérivée de f sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$? sur l'intervalle $[3\ ;\ 7]$?

EXERCICE 9

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

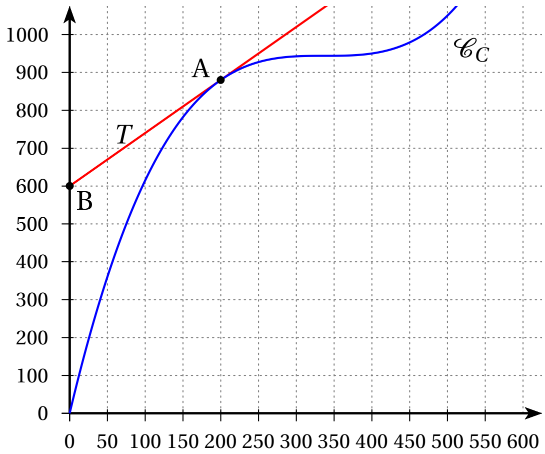
Quel est le sens de variations de f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,15]$? sur l'intervalle $[15\,;\,+\infty[$?

EXERCICE 10

Une entreprise fabrique des articles de sport.

Le coût total de fabrication, en euros, est modélisé par une fonction C dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

La tangente T à cette courbe au point A (200 ; 880) passe par le point B (0 ; 600).



On appelle coût marginal au rang 200 le coût engendré par la fabrication du 201$^{\text{ème}}$ article.

Une valeur approchée de ce coût est donnée par le nombre dérivé de la fonction C en 200.

Déterminer graphiquement une valeur approchée du coût marginal au rang 200.

EXERCICE 11

La courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f passe par les points A $(0\,;\,-1)$, B $(1\,;\,-4)$ et C $(2\,;\,-1)$.

La fonction f est dérivable en 0, en 1 et en 2.

On sait que $f'(0) = -6$, $f'(1) = 0$ et $f'(2) = 6$.

Déterminer l'équation réduite des tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1 et 2.

EXERCICE 12

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

On sait que les points A $(-2\,;\,-1)$, B $(-1\,;\,-2)$ et C $(0\,;\,-1)$ appartiennent à $\mathscr{C}_f$.

1. Placer les points A, B et C dans un repère.
2. On sait aussi que f est dérivable en -2, en -1 et en 0.

   On donne les nombres dérivés suivants : $f'(-2) = -3$, $f'(-1) = 0$ et $f'(0) = 2$.

   Tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A, en B et en C.
3. Tracer une courbe pouvant représenter f.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 6x - 10$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. Préciser sa nature et en quelle valeur de x il est atteint.

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;\,6]$ par :

$$f(x) = 5(x-3)^2 + 1$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-1\,;\,6]$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-1\,;\,6]$.

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3{,}5x^2 - 3x + 1$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2x+3)(3x-1)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 17

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 20$$

1. Démontrer que $f'(x) = 3(x+3)(x-5)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$.

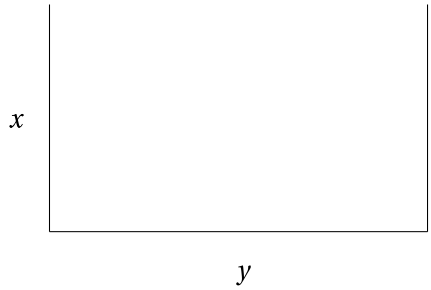
EXERCICE 18

Monsieur et Madame Dupont souhaitent créer un potager de forme rectangulaire, le long du mur de leur maison.

Pour cela, ils disposent de 15 m de grillage pour clôturer les trois côtés, le 4ème côté étant le mur.

Le potager devra avoir la plus grande surface possible.

On pose x et y les dimensions, en mètre, du potager, comme indiqué sur le dessin :



1. A quels intervalles appartiennent x et y ?
2. Démontrer que : $y = 15 - 2x$.
3. En déduire que la surface du potager est égale à l'expression : $-2x^2 + 15x$.
4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 7{,}5]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 15x$$

   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 7{,}5]$.
   c. En déduire que la fonction f admet un maximum.
   Quel est ce maximum ? En quelle valeur est-il atteint ?
   d. Interpréter les résultats de la question **4.c.** dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 19

Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire, en euros, réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes.

La fonction B est définie sur l'intervalle $[0 ; 45]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

1. Calculer $B'(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 45]$, $B'(x) = (-3x + 15)(x - 35)$.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 45]$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction B.
5. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? A combien s'élève-t-il alors ?

EXERCICE 20

La patronne d'un restaurant dispose d'un menu du soir à 15 €. En moyenne, elle sert 80 clients chaque soir.

Elle souhaite modifier le prix de son menu afin d'optimiser son bénéfice.

Une étude de son restaurant lui apporte les résultats suivants :

- Le coût de réalisation d'un menu est de 10 €.
- Une augmentation du prix entraîne une baisse du nombre moyen de clients chaque soir. Pour une augmentation de 1 €, cette baisse est estimée à 5 clients.

Pour une augmentation de x euros du prix du menu, on note $B(x)$ le bénéfice moyen réalisé en euro.

Par exemple, si le prix du menu passe à 16 €, alors $x = 1$ et $B(1) = 450$.

1. Pour une augmentation de x euros, donner en fonction de x :
   - **a.** Le prix du menu.
   - **b.** Le nombre de clients.
   - **c.** Le chiffre d'affaires par soir.
2. En déduire que $B(x) = -5x^2 + 55x + 400$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
4. Lorsque le bénéfice est maximal :
   - **a.** Quelle est la valeur de x ?
   - **b.** Donner alors le prix du menu.
   - **c.** Quel est le bénéfice ?
   - **d.** Quel est le nombre moyen de clients par soir ?

EXERCICE 21

Une entreprise produit des bouteilles d'eau issue des glaciers. L'eau arrive sous forme de cubes de glace de 1 m de côté. Ces cubes sont mis à fondre et l'eau ainsi produite se déverse dans une cuve qui contient déjà 100 L d'eau.

Le volume d'eau dans la cuve en fonction du temps est donné par la fonction v définie par :

$$v(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 100$$

où x est le temps en heure, et $v(x)$ le volume d'eau en litre.

Maxime et Paula, deux employés, veulent connaître le débit, en $L.h^{-1}$, au bout de deux heures de fonte.

1. Maxime décide d'approcher ce débit en calculant le débit moyen entre 2 heures et 4 heures.
   - **a.** Calculer $v(2)$, le volume présent dans la cuve au bout de 2 heures, puis $v(4)$.
   - **b.** En déduire la quantité d'eau produite entre 2 heures et 4 heures.
   - **c.** Calculer le débit moyen entre 2 heures et 4 heures.
2. Paula rappelle que l'on peut obtenir le débit instantané à n'importe quel moment et de manière exacte avec la fonction dérivée de v.
   - **a.** Calculer $v'(x)$.
   - **b.** Calculer $v'(2)$, le débit instantané, en $L.h^{-1}$, après 2 heures de fonte.
   - **c.** Comparer ce résultat avec celui de Maxime.

EXERCICE 22

Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner une forme idéale pour réaliser des enrobages.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 12{,}5]$ par :

$$f(t) = 0{,}14t^3 - 3{,}15t^2 + 18{,}48t + 18$$

Lorsque t représente le temps, en minutes, on admet que $f(t)$ modélise le température, en degrés Celsius, du chocolat à l'instant t, au cours d'une opération de tempérage.

1. Pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 12{,}5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que :

$$f'(t) = 0{,}42(t-4)(t-11)$$

2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 12{,}5]$.
3. Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?

EXERCICE 23

Un joueur de rugby se situe à une distance de 20 mètres des poteaux. Il souhaite que le ballon passe au-dessus de la barre située à 3 mètres du sol.

Le joueur est placé à l'origine d'un repère et la trajectoire du ballon peut être modélisée par la fonction h définie par $h(x) = ax^2 + bx + c$, où x représente la distance, en mètre, parcourue par la projection orthogonale du ballon sur le sol, et $h(x)$ la hauteur, en mètre, du ballon.

Partie A. Détermination de $h(x)$

1. On sait que $h(0) = 0$. Déterminer c.
2. Le joueur décide d'orienter son tir de telle sorte qu'au départ du ballon, l'angle formé par la tangente de la trajectoire avec le sol ait pour mesure 45°.

   On a alors : $h'(0) = 1$.

   a. Calculer $h'(x)$.

   b. On sait que $h'(0) = 1$. Déterminer b.
3. Le joueur sait que le ballon retouchera le sol à 25 mètres de lui.

   a. Traduire cette information à l'aide de la fonction h.

   b. Déterminer a.

Partie B. Étude de la trajectoire du ballon

On admet que $h(x) = -0{,}04x^2 + x$ pour $x \in [0\ ;\ 25]$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 25]$.
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?

   Pour quelle valeur de x ?
5. Les poteaux se situent à 20 mètres du joueur.

   a. Quelle est la hauteur du ballon à cet endroit ?

   b. Le joueur réussit-il son tir ?

EXERCICE 24

Une entreprise produit des pizzas surgelées. On suppose qu'elle vend toute sa production par lots de 25 pizzas, à la grande distribution.

L'entreprise produit entre 10 et 100 lots par jour et le prix de vente d'un lot est égal à 78,50 €.

On estime que le coût total par jour de production, incluant les salaires, les ingrédients, les différentes charges, est donné par :

$$C(x) = 0{,}02x^3 - 2{,}5x^2 + 116x + 880$$

avec $x \in [10\ ;\ 100]$, où x est le nombre de lots fabriqués, et $C(x)$ est le coût de fabrication de x lots, en euro.

Partie A. Coût marginal

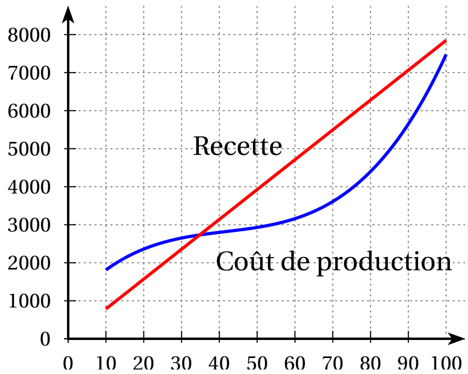
1. Calculer $C'(x)$.
2. On sait que le coût marginal $C_m(x)$ peut être assimilé à $C'(x)$. On pose : $C_m(x) = C'(x)$.
   a. Calculer $C'_m(x)$.
   b. Étudier les variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[10\ ;\ 100]$.
   c. Représenter graphiquement la fonction C_m sur la calculatrice.
3. Il est intéressant pour l'entreprise de continuer à produire tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, soit 78,50 €.
   a. Tracer sur le graphique précédent la droite d'équation $y = 78{,}50x$.
   b. Déterminer graphiquement jusqu'à quelle valeur de x il est intéressant pour l'entreprise de continuer à produire.

Partie B. Étude du bénéfice

On pose $R(x) = 78{,}50x$, la recette en euro, pour x lots vendus.

Le bénéfice $B(x)$, pour x lots fabriqués et vendus, est la différence entre la recette et le coût de production. On pose : $B(x) = R(x) - C(x)$.

On a représenté les fonctions C et R dans le repère ci-dessous :



1. Par lecture graphique, estimer la valeur de x pour laquelle le bénéfice est maximal ? Expliquer le raisonnement.
2. **a.** Démontrer que : $B(x) = -0{,}02x^3 + 2{,}5x^2 - 37{,}5x - 880$.
   b. Calculer $B'(x)$.
   c. Démontrer que $B'(x) = (-0{,}6x + 0{,}5)(x - 75)$.
   d. Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau de variations de B sur $[10\ ;\ 100]$.
   e. Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?