Lycée Jean DROUANT
École Hôtelière de PARIS
20, rue Médéric
75 017 PARIS

COURS DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE PRO

Emmanuel DUPUY
Emmanuel-R.Dupuy@ac-paris.fr

PARIS
Année 2024-2025

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. Suites numériques

- **§ 1. Suites numériques** 4
  - **a.** Suite numérique 4
  - **b.** Représentation graphique 4
  - **c.** Sens de variations 5
- **§ 2. Modes de génération d'une suite** 5
  - **a.** Suite définie par une relation de récurrence 5
  - **b.** Suite définie par une relation fonctionnelle 5
- **§ 3. Suites arithmétiques** 6
  - **a.** Suite arithmétique 6
  - **b.** Représentation graphique 6
  - **c.** Sens de variations 7
  - **d.** Expression de u_n en fonction de n 7
  - **e.** Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique 7

CHAPITRE 2. Séries statistiques à deux variables

- **§ 1. Séries statistiques à deux variables** 8
  - **a.** Série statistique double 8
  - **b.** Nuage de points 8
- **§ 2. Ajustements affines** 9
  - **a.** Point moyen 9
  - **b.** Ajustement affine 9
  - **c.** Estimations à l'aide d'un ajustement affine 10

CHAPITRE 3. Probabilités

- **§ 1. Probabilités** 11
  - **a.** Univers 11
  - **b.** Loi de probabilité 12
  - **c.** Événement 12
  - **d.** Probabilité d'un événement 13
- **§ 2. Calculs de probabilités** 13
  - **a.** Intersection de 2 événements 13
  - **b.** Réunion de 2 événements 14
  - **c.** Événement complémentaire 14

CHAPITRE 4. Fonctions

- **§ 1. Fonctions comme modèles d'évolutions continues** 16
  - **a.** Fonction 16
  - **b.** Représentation graphique 16
  - **c.** Taux de variation 17

d. Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = k$ 17
e. Résolution graphique d'une inéquation du type $f(x) < k$ 18
§ 2. Fonctions polynômes de degré 2 18
a. Représentations graphiques 18
b. Racines du polynôme du second degré 18
c. Signe du polynôme du second degré 19
§ 3. Fonctions polynômes de degré 3 19
a. Représentations graphiques 19
b. Racine cubique 19
c. Racines du polynôme du troisième degré 20
d. Signe du polynôme du troisième degré 20

CHAPITRE 5. Statistiques et probabilités
§ 1. Statistiques 21
a. Tableau croisé 21
b. Fréquence marginale 22
c. Fréquence conditionnelle 22
§ 2. Probabilités conditionnelles 23

CHAPITRE 6. Dérivation
§ 1. Tangente à une courbe et nombre dérivé 24
a. Tangente à une courbe 24
b. Nombre dérivé 25
c. Équation de la tangente à une courbe 25
§ 2. Fonction dérivée 26
a. Fonction dérivée 26
b. Fonction dérivée des fonctions usuelles 26
c. Fonctions dérivées et opérations 26
§ 3. Signe de la dérivée et sens de variations 27
a. Dérivée d'une fonction monotone 27
b. Signe de la dérivée et sens de variations 27

CHAPITRE 1

SUITES NUMÉRIQUES

§ 1. Suites numériques

a. Suite numérique

EXEMPLE

- Burgers

  Le tableau suivant présente l'évolution de la consommation de burgers, en milliard, par les français entre 2012 et 2015 :

Année	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année	0	1	2	3
Nombre de burgers consommés	0,92	0,97	1,07	1,19

On note u_n et on lit « u indice n » le nombre de burgers consommés l'année $2012+n$.

Ainsi : $u_0 = 0{,}92$; $u_1 = 0{,}97$; $u_2 = 1{,}07$; $u_3 = 1{,}19$.

DÉFINITION

- Une *suite numérique* (u_n) est une liste numérotée de nombres.
- L'entier naturel n s'appelle le *rang*.
- Le nombre u_n s'appelle le *terme* de rang n de la suite.

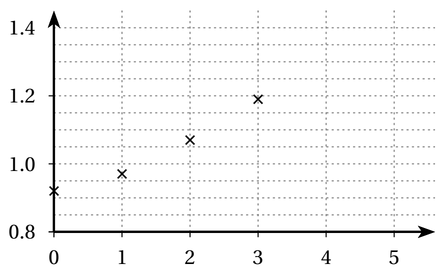
b. Représentation graphique

MÉTHODE

On peut représenter une suite (u_n) en plaçant dans un repère les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

EXEMPLE

- Burgers



c. Sens de variations

DÉFINITION

- Une suite (u_n) est une *suite croissante* lorsque, pour tout entier n :

$$u_n < u_{n+1}$$

Autrement dit, chaque terme est inférieur au terme suivant.

- Une suite (u_n) est une *suite décroissante* lorsque, pour tout entier n :

$$u_n > u_{n+1}$$

Autrement dit, chaque terme est supérieur au terme suivant.

EXEMPLE

- Burgers
  Puisque $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$, alors la consommation de burgers forme une suite croissante.

§ 2. Modes de génération d'une suite

a. Suite définie par une relation de récurrence

EXEMPLE

- Nombres impairs
  La suite des nombres impairs est définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence valable pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

Par exemple, on a :
$u_1 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$.
$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5$.

b. Suite définie par une relation fonctionnelle

EXEMPLE

- Nombres impairs
  La suite des nombres impairs est définie par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par l'expression $f(x) = 2x + 1$, et, pour tout entier n :

$$u_n = 2n + 1$$

Par exemple, on a :
$u_{1\,000} = 2 \times 1\,000 + 1 = 2\,001$.
$u_{2\,024} = 2 \times 2\,024 + 1 = 4\,049$.

§ 3. Suites arithmétiques

a. Suite arithmétique

DÉFINITION

Soit r un nombre.
Une suite (u_n) est une *suite arithmétique* de *raison r* lorsque, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

EXEMPLE

- Économies
  Le 1er janvier 2020, j'économise 100 €.
  Chaque 1er jour des mois suivants, j'économise 15 € supplémentaires.
  On note u_n les économies au bout de n mois depuis le 1er janvier 2020.
  Puisque chaque 1er jour du mois, j'économise 15 €, alors pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + 15$.
  Par **DÉFINITION**, la suite (u_n) des économies est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $r = 15$.

CONTRE-EXEMPLE

- Burgers
  On a : $u_1 - u_0 = 0{,}05$ mais $u_2 - u_1 = 0{,}10$.
  La consommation de burgers en France ne forme pas une suite arithmétique.

b. Représentation graphique

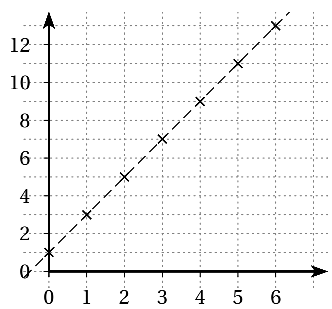
PROPRIÉTÉ

Si (u_n) est une suite arithmétique, alors l'ensemble des points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ est situé sur une droite.

EXEMPLE

- Nombres impairs

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	3	5	7	9	11	13



c. Sens de variations

PROPRIÉTÉ

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.

d. Expression de u_n en fonction de n

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

EXEMPLE

- Économies

  La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme 100 et de raison 15 donc, par **PROPRIÉTÉ**, pour tout entier n : $u_n = 100 + n \times 15 = 100 + 15n$.

  Par exemple le 1er janvier 2021, $n = 12$ et $u_{12} = 100 + 15 \times 12 = 280$.

  Ainsi, au bout d'un an, j'aurai économisé 280 €.

e. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

PROPRIÉTÉ

La somme S de p termes consécutifs d'une suite arithmétique dont le premier terme est a et le dernier terme est b est donnée par :

$$S = p \times \frac{a+b}{2}$$

EXEMPLE

- $S = 0 + 1 + \ldots + 100$

  La somme S est la somme de 101 termes consécutifs d'une suite arithmétique dont le premier terme est 0 et le dernier terme est 100 donc :

$$S = 101 \times \frac{0+100}{2} = \frac{101 \times 100}{2} = 5\,050$$

CHAPITRE

2

SÉRIES STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

§ 1. Séries statistiques à deux variables

a. Série statistique double

DÉFINITION

Une *série statistique double* est le résultat de l'étude statistique de deux variables X et Y.
On note x_i les valeurs de la variable X et y_i les valeurs correspondantes de la variable Y.

EXEMPLE

- Burgers

Année	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année x_i	0	1	2	3
Nombre de burgers consommés y_i	0,92	0,97	1,07	1,19

Les variables X et Y sont le rang de l'année et le nombre de burgers consommés.

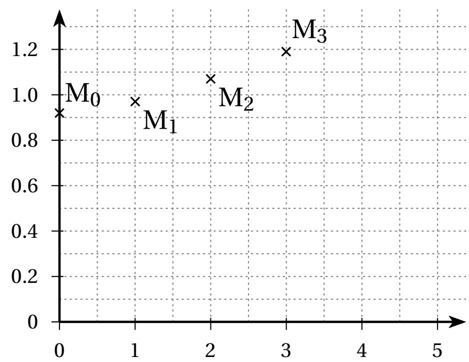
b. Nuage de points

DÉFINITION

Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est appelé le *nuage de points* associé à la série statistique à deux variables X et Y.

EXEMPLE

- Burgers



§ 2. Ajustements affines

a. Point moyen

DÉFINITION

On note $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes respectives des valeurs des variables X et Y.

Le point G de coordonnées $\left(\overline{x}\ ;\ \overline{y}\right)$ est appelé le *point moyen* du nuage de points associé à la série statistique à deux variables X et Y.

EXEMPLE

- Burger

  On a : $\overline{x} = \dfrac{0+1+2+3}{4} = 1{,}5$ et $\overline{y} = \dfrac{0{,}92+0{,}97+1{,}07+1{,}19}{4} = 1{,}037\,5$.

  Le point moyen G est le point de coordonnées $(1{,}5\ ;\ 1{,}037\,5)$.

b. Ajustement affine

DÉFINITION

Lorsque le nuage de points d'une série statistique double a une forme « allongée », on peut tracer une droite (ou plusieurs) qui passe « le plus près possible » des points du nuage.

On dit qu'une telle droite réalise un *ajustement affine* du nuage de points.

PROPRIÉTÉ

Il existe une unique droite passant par le point moyen du nuage et qui minimise la somme des carrés des « écarts verticaux » des points du nuage à cette droite.

Cette droite est appelée la droite d'*ajustement affine par la méthode des moindres carrés* ou la *droite de régression de y en x*.

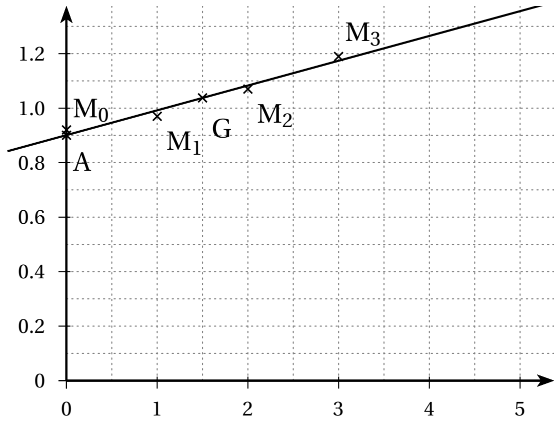
EXEMPLE

- Burgers

  Le nuage de points de la série statistique à deux variables X et Y a une forme « allongée » donc on peut réaliser un ajustement affine du nuage.

  On choisit la droite (d) de régression de y en x et à la calculatrice, on obtient l'équation : $y = 0{,}091x + 0{,}901$.

  La droite (d) passe par les points A(0 ; 0,901) et G(1,5 ; 1,037 5).



c. Estimations à l'aide d'un ajustement affine

EXERCICE

En utilisant la droite de régression (d) :

1. Prévoir le nombre de burgers consommés par les français en 2020.
2. Prévoir en quelle année les français consommeront 2 milliards de burgers.

SOLUTION

1. En 2020, $x = 8$ et $y = 0{,}091 \times 8 + 0{,}901 = 1{,}629$.

   En 2020, les français consommeront 1 milliard 629 millions de burgers.
2. On a par équivalences successives :

$$y = 2 \Leftrightarrow 0{,}091x + 0{,}901 = 2 \Leftrightarrow 0{,}091x = 1{,}099 \Leftrightarrow x \simeq 12$$

   Lorsque $x = 12$, c'est à dire en 2024, les français consommeront 2 milliards de burgers.

CHAPITRE 3

PROBABILITÉS

CONNAISSANCES ET CAPACITÉS

- Univers, issues.
- Loi de probabilité.
- Événements.
- Probabilité d'un événement.
- Réunion, intersection, complémentaire.
- Relation $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.
- Dénombrements à l'aide de tableaux et d'arbres.

- Utiliser des modèles de référence : dé, pièce équilibrée...
- Construire un modèle à partir de fréquences observées.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

§ 1. Probabilités

a. Univers

DÉFINITION

- Une *expérience aléatoire* est une expérience qui conduit à des résultats sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
- Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé une *issue*.
- L'ensemble des issues, noté Ω, est appelé l'*univers*.

EXEMPLE

- Dé non pipé

  On lance un dé parfaitement équilibré numéroté de 1 à 6.

  On note le numéro obtenu.

  On a : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

- Boules de couleur

  On tire une boule au hasard dans une urne contenant 4 boules bleues, 2 boules jaunes et 1 boule verte.

  On note la couleur de la boule tirée.

  On a : $\Omega = \{b ; j ; v\}$.

b. Loi de probabilité

DÉFINITION

On note $\Omega = \{e_1 ; ... ; e_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

On définit une *loi de probabilité* sur Ω lorsqu'on associe à chaque issue e_i un réel positif ou nul $p(e_i)$ appelé la *probabilité* de l'issue e_i, de telle sorte que :

$$\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1$$

PROPRIÉTÉ

Dans une situation d'équiprobabilité sur Ω, on a :

$$p(e_1) = ... = p(e_n) = \frac{1}{n}$$

EXEMPLE

- Dé non pipé
  Le dé étant parfaitement équilibré, on conçoit une situation d'équiprobabilité.
  On définit sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ la loi de probabilité :

Issue e_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(e_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Boules de couleur
  On définit sur $\Omega = \{b ; j ; v\}$ la loi de probabilité :

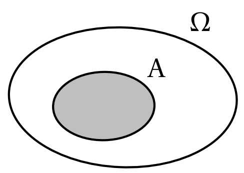
Issue e_i	b	j	v
Probabilité $p(e_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

c. Événement

DÉFINITION

On considère un univers Ω.

- On appelle *événement* toute partie A de Ω.
- On appelle *événement élémentaire* tout événement à une seule issue.
- L'univers Ω est appelé l'*événement certain*.
- L'ensemble vide $\emptyset$ à zéro issue est appelé l'*événement impossible*.



d. Probabilité d'un événement

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur un univers $\Omega = \{e_1 \; ; \; ... \; ; \; e_n\}$ et un événement A.
La *probabilité de l'événement* A, notée $p(\mathrm{A})$, est la somme des probabilités des issues de A.

EXEMPLE

- Boules de couleur

  Soit A l'événement : « la boule tirée est une couleur primaire ».

  On a : $\mathrm{A} = \{b \; ; \; j\}$ et $p(\mathrm{A}) = p(b) + p(j) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

PROPRIÉTÉ

Dans une situation d'équiprobabilité sur Ω, on a :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega} = \frac{\textit{cas favorables}}{\textit{cas possibles}}$$

EXEMPLE

- Dé non pipé

  Soit A l'événement : « le numéro est un multiple de 3 ».

  On a : $\mathrm{A} = \{3 \; ; \; 6\}$ et $p(\mathrm{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

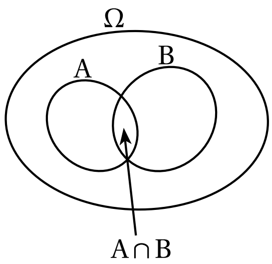
§ 2. Calculs de probabilités

a. Intersection de 2 événements

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur Ω et deux événements A et B.

L'*événement intersection* de A et de B, noté $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, est la partie de Ω constituée des issues qui sont **à la fois** dans les deux événements A **et** B.



EXEMPLE

- Dé non pipé

  Soit A l'événement : « le numéro est un multiple de 3 ».

  Soit B l'événement : « le numéro est supérieur ou égal à 4 ».

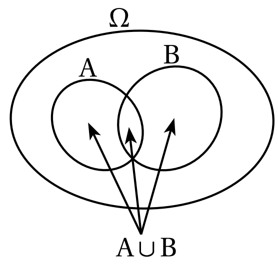
  On a : $\mathrm{A} = \{3 \; ; \; \mathbf{6}\}$; $\mathrm{B} = \{4 \; ; \; 5 \; ; \; \mathbf{6}\}$; $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\mathbf{6}\}$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{6}$.

b. Réunion de 2 événements

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur Ω et deux événements A et B.

L'*événement réunion* de A et de B, noté $A \cup B$, est la partie de Ω constituée des issues qui sont **au moins** dans l'un des deux événements A **ou** B.



EXEMPLE

- Dé non pipé

  Soit A l'événement : « le numéro est un multiple de 3 ».

  Soit B l'événement : « le numéro est supérieur ou égal à 4 ».

  On a : $A = \{\mathbf{3}\ ;\ \mathbf{6}\}$; $B = \{\mathbf{4}\ ;\ \mathbf{5}\ ;\ \mathbf{6}\}$; $A \cup B = \{\mathbf{3}\ ;\ \mathbf{4}\ ;\ \mathbf{5}\ ;\ \mathbf{6}\}$ et $p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

PROPRIÉTÉ

Pour n'importe quels événements A et B :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

EXEMPLE

- Dé non pipé

  Soit A l'événement : « le numéro est un multiple de 3 ».

  Soit B l'événement : « le numéro est supérieur ou égal à 4 ».

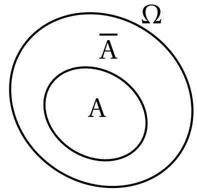
  On a bien $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ car $\frac{4}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$.

c. Événement complémentaire

DÉFINITION

On considère une loi de probabilité sur Ω et un événement A.

L'*événement complémentaire* de A, noté $\overline{A}$, est la partie de Ω constituée des issues qui ne sont pas dans A.



PROPRIÉTÉ

Pour n'importe quel événement A :

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

CHAPITRE

4

FONCTIONS

CONNAISSANCES ET CAPACITÉS

Les fonctions comme modèles mathématiques d'évolutions continues :

- Différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique.
- Notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$.
- Taux de variation entre deux valeurs de la variable x.

Fonctions polynômes de degré 2 :

- Représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$ et $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Axes de symétrie.
- Racines et signe d'un polynôme de degré 2 sous forme factorisée.

Fonctions polynômes de degré 3 :

- Représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto ax^3 + b$.
- Racines et signe d'un polynôme de degré 3 sous forme factorisée.
- Équation $x^3 = c$.

- Modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction.
- Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$ ou une inéquation de la forme $f(x) < k$ ou $f(x) > k$.
- Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts.
- Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2, pour les fonctions de la forme : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$ et $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Déterminer des éléments caractéristiques (signe, extremum, allure de la courbe, axe de symétrie) de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2 ou 3.
- Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 ou 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Résoudre des équations de la forme $x^2 = c$ et $x^3 = c$, avec c positif.

§ 1. Fonctions comme modèles d'évolutions continues

a. Fonction

EXEMPLE

- Engrais
  Un industriel produit et vend entre 1 000 L et 6 000 L d'engrais bio chaque mois.
  Le bénéfice y en milliers d'euros pour x milliers de litres vendus est donné par l'expression :

$$y = -1{,}5x^2 + 10{,}2x - 4$$

Le procédé qui à $x \in [1\,;\,6]$ associe $y \in \mathbb{R}$ définit une fonction f.

DÉFINITION

- Une *fonction* f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$ est un procédé qui à tout réel $x \in \mathbb{E}$ associe un unique réel $f(x)$.
- L'expression $f(x)$ s'appelle l'*expression littérale* de f.
- On note : $x \longmapsto f(x)$.

b. Représentation graphique

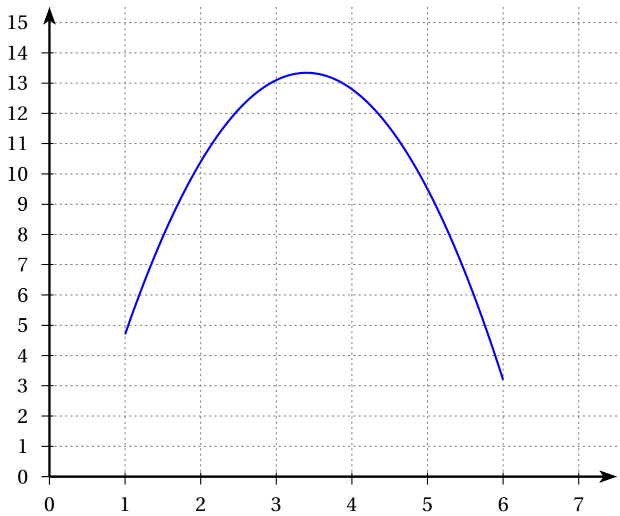
DÉFINITION

On considère un repère du plan et une fonction f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$.

- L'ensemble des points de coordonnées $\big(x\,;\,f(x)\big)$, avec $x \in \mathbb{E}$, s'appelle la *représentation graphique* de la fonction f dans le repère.
- Cet ensemble s'appelle aussi la *courbe d'équation* $y = f(x)$.

EXEMPLE

- Engrais
  A l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, on obtient :



c. Taux de variation

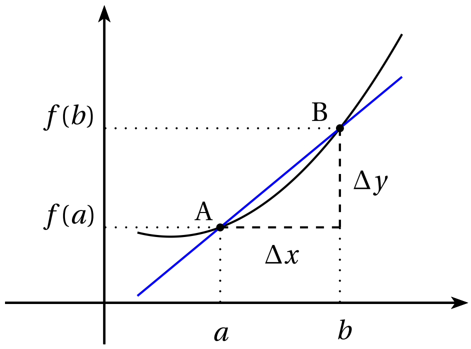
DÉFINITION

On considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$ et deux réels a et b de $\mathbb{E}$ tels que $a < b$.

- Le *taux de variation* de la fonction f entre a et b est défini par :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Le taux de variation de f entre a et b est le coefficient directeur de la droite (AB).



EXEMPLE

- Engrais
  On a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{9{,}5 - 13{,}1}{2} = -1{,}8$.
  Le taux de variation entre 3 et 5 milliers de litres est égal à $-1{,}8$ milliers d'euros.

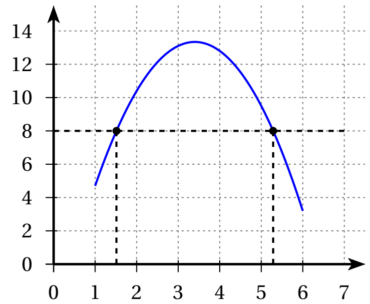
PROPRIÉTÉ

Pour qu'une fonction soit monotone sur un intervalle, il faut et il suffit que son taux de variation entre deux réels quelconques de cet intervalle garde un signe constant.

d. Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = k$

EXEMPLE

- Engrais
  Graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 8$ sont les réels environ égaux à 1,5 et 5,3, abscisses des points de la courbe d'ordonnée égale à 8.



PROPRIÉTÉ

On considère une fonction f et un réel k. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère.

Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée égale à k.

e. Résolution graphique d'une inéquation du type $f(x) < k$

EXEMPLE

- Engrais

  Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) < 8$ sont les réels $x \in [1\,;\,1{,}5[\cup]5{,}3\,;\,6]$.

PROPRIÉTÉ

On considère une fonction f et un réel k. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère.
Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée inférieure à k.

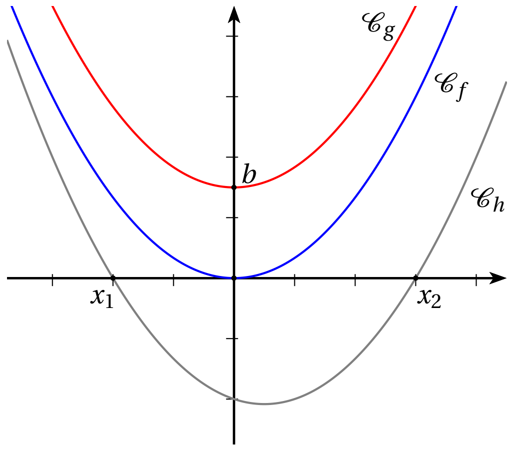
§ 2. Fonctions polynômes de degré 2

a. Représentations graphiques

PROPRIÉTÉ

On considère un repère (O ; I, J).

- La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = ax^2$ est une parabole de sommet O, d'axe de symétrie l'axe des ordonnées, de branches « vers le haut » lorsque $a > 0$ et « vers le bas » lorsque $a < 0$.
- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie par $g(x) = ax^2 + b$ est une parabole de sommet B $(0\,;\,b)$, image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.
- La courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h définie par $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est une parabole qui coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses x_1 et x_2.



b. Racines du polynôme du second degré

DÉFINITION

Les réels x_1 et x_2 s'appellent les *racines* du polynôme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Ce sont les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXEMPLE

- $f(x) = x^2 - 4x + 3$

  On a : $f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$.

  On a : $f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$.

  D'où : $f(x) = (x - 1)(x - 3)$.

c. Signe du polynôme du second degré

PROPRIÉTÉ

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
En ayant ordonné x_1 et x_2, le tableau de signe de f est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

EXEMPLE

- $f(x) = x^2 - 4x + 3$
  Puisque $f(x) = (x-1)(x-3)$ et $a > 0$, alors le tableau de signe de f est donné par :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

§ 3. Fonctions polynômes de degré 3

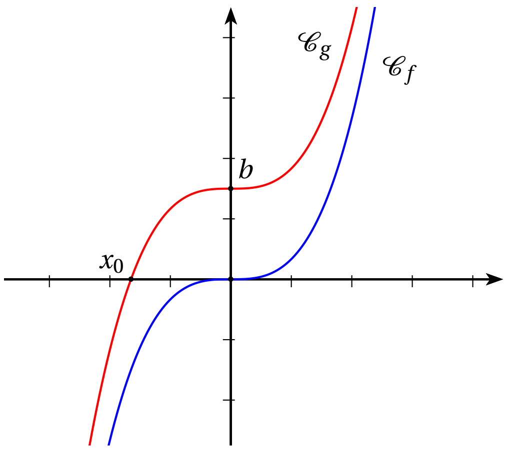
a. Représentations graphiques

PROPRIÉTÉ

On considère un repère (O ; I, J).

- La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = ax^3$ est une cubique de centre de symétrie O, « croissante » lorsque $a > 0$ et « décroissante » lorsque $a < 0$.
- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie par $g(x) = ax^3 + b$ est une cubique de centre de symétrie B $(0\,;\,b)$, image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{OB}}$.

  Elle coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse x_0.



b. Racine cubique

DÉFINITION

On considère un réel k.
L'unique solution de l'équation $x^3 = k$ s'appelle la *racine cubique* du réel k.

NOTATION

On note $k^{1/3}$ la racine cubique d'un réel k.

EXEMPLE

- $8^{1/3} = 2$ car $2^3 = 8$
- $(-8)^{1/3} = -2$
- $1{,}33\,1^{1/3} = 1{,}1$

c. Racines du polynôme du troisième degré

DÉFINITION

Les réels x_1, x_2 et x_3 s'appellent les *racines* du polynôme $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
Ce sont les trois solutions de l'équation $f(x) = 0$.

d. Signe du polynôme du troisième degré

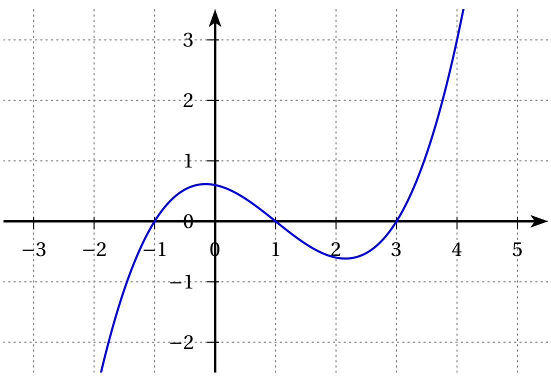
PROPRIÉTÉ

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
En ayant ordonné x_1, x_2 et x_3, le tableau de signe de f est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		$\text{sgn}(-a)$	0	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	0	$\text{sgn}(a)$	

EXEMPLE

- $f(x) = \dfrac{1}{5}(x+1)(x-1)(x-3)$



Puisque $a > 0$, alors le tableau de signe de f est donné par :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

CHAPITRE 5

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

CONNAISSANCES ET CAPACITÉS

- Tableau croisé d'effectifs.
- Fréquence marginale, fréquence conditionnelle.
- Probabilité conditionnelle. Notation $P_A(B)$.

- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales.
- Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs.

§ 1. Statistiques

a. Tableau croisé

DÉFINITION

- Un *tableau croisé d'effectifs* est l'ensemble des résultats de l'étude de deux *variables* dans une *population*.

EXEMPLE

- Groupe

Age / Sexe	Mineurs (B)	Majeurs ($\overline{\text{B}}$)	Total
Garçons (A)	10	15	25
Filles ($\overline{\text{A}}$)	6	9	15
Total	16	24	40

La première variable est le sexe. La dernière colonne, dite *colonne marginale*, indique le nombre de garçons (25) et le nombre de filles (15) dans le groupe.

La deuxième variable est l'âge. La dernière ligne, dite *ligne marginale*, indique le nombre de mineurs (16) et le nombre de majeurs (24) dans le groupe.

Le croisement de la colonne marginale et de la ligne marginale indique le nombre d'individus (40) dans le groupe.

Les autres cases indiquent le nombre d'individus selon le sexe et l'âge. Il y a par exemple 10 garçons mineurs dans le groupe.

b. Fréquence marginale

EXEMPLE

- Groupe

  La fréquence de garçons dans le groupe est donnée par : $f(\mathrm{A}) = \dfrac{25}{40} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$.

  La fréquence de mineurs dans le groupe est donnée par : $f(\mathrm{B}) = \dfrac{16}{40} = 0{,}40 = 40\ \%$.

DÉFINITION

On note Card(E) le nombre d'individus dans la population E et Card(A) le nombre d'individus ayant le caractère A.

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	Total
A			Card(A)
$\overline{\mathrm{A}}$			
Total			Card(E)

La *fréquence marginale* de A dans E est donnée par la formule :

$$f(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card(E)}}$$

c. Fréquence conditionnelle

EXEMPLE

- Groupe

  La fréquence de mineurs parmi les garçons est donnée par : $f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{10}{25} = 0{,}40 = 40\ \%$.

  La fréquence de garçons parmi les mineurs est donnée par : $f_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{10}{16} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$.

DÉFINITION

On note Card(A ∩ B) le nombre d'individus ayant à la fois les caractères A et B.

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	Total
A	Card(A ∩ B)		Card(A)
$\overline{\mathrm{A}}$			
Total			

La *fréquence conditionnelle* de B dans A est donnée par la formule :

$$f_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{Card(A \cap B)}}{\mathrm{Card(A)}}$$

§ 2. Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.

On suppose que $\mathrm{Card}(\mathrm{A}) \neq 0$.

La *probabilité conditionnelle* de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est donnée par la formule :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}$$

EXEMPLE

- Groupe

  On choisit au hasard un individu du groupe.

  On a : $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{Card}(\mathrm{A})} = \dfrac{10}{25} = 0{,}40 = 40\ \%$.

  La probabilité que l'individu soit mineur sachant que l'individu est un garçon est égale à 40 %.

CHAPITRE 6

DÉRIVATION

CONNAISSANCES ET CAPACITÉS

- Sécantes à une courbe passant par un point donné.
- Tangente à une courbe en un point.
- Nombre dérivé en un point.
- Équation réduite de la tangente en un point.
- Fonction dérivée.
- Fonctions dérivées de : $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$.
- Dérivée d'une somme, dérivée de $k \times f$ où k est un réel.
- Dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
- Sens de variations d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée.
- Tableau de variations, extremums.

- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Construire la tangente à une courbe en un point.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.
- Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

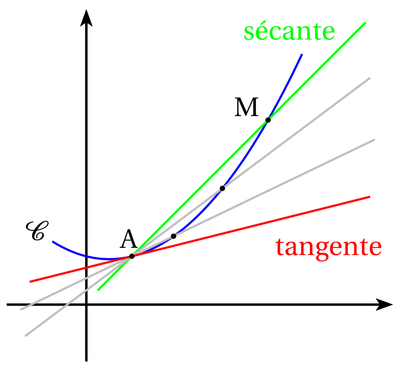
§ 1. Tangente à une courbe et nombre dérivé

a. Tangente à une courbe

DÉFINITION

On considère une fonction f définie sur un ensemble $\mathbb{E}$ et un point A sur la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.

- Une *sécante* à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point A est une droite qui passe par A et par un autre point M de la courbe $\mathscr{C}$.
- La *tangente* à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point A est la droite limite des sécantes lorsque le point M tend vers A.



b. Nombre dérivé

REMARQUE

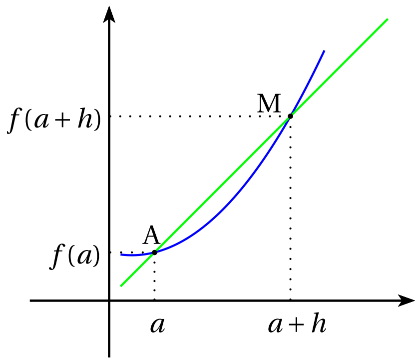
Dans les conditions précédentes :

On note a l'abscisse du point A.

On note h le réel tel que $a+h$ soit l'abscisse du point M.

Le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ est donné par :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



DÉFINITION

Dans les conditions précédentes :

- La fonction f est *dérivable* en a lorsque le taux de variation de f entre a et $a+h$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.
  On note alors :
  $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- Le réel $f'(a)$ s'appelle le *nombre dérivé* de f en a.

c. Équation de la tangente à une courbe

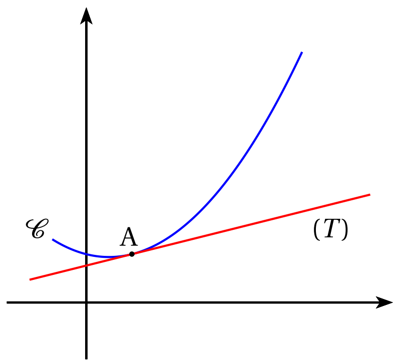
PROPRIÉTÉ

Dans les conditions précédentes :

Si la fonction f est dérivable en a, la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur le réel $f'(a)$.

Autrement dit :

$$(T) : y = mx + p \text{ avec } \begin{cases} m = f'(a) \\ p = f(a) - a \times f'(a) \end{cases}$$



EXEMPLE

- Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 3$ et $f'(1) = -2$.
  Soit (T) la tangente au point A d'abscisse 1.
  On a : $(T) : y = mx + p$.
  On a : $m = f'(1) = -2$.
  On a : $p = f(1) - 1 \times f'(1) = 3 - 1 \times (-2) = 5$.
  D'où : $(T) : y = -2x + 5$.

§ 2. Fonction dérivée

a. Fonction dérivée

DÉFINITION

On considère une fonction f dérivable en tout réel $x \in \mathbb{E}$.
- On dit que f est *dérivable* sur $\mathbb{E}$.
- La fonction f' définie sur $\mathbb{E}$ par l'expression $f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée* de f.

b. Fonction dérivée des fonctions usuelles

PROPRIÉTÉ

Fonction f	**Expression $f(x)$**	**Expression $f'(x)$**
Constante	k	0
Linéaire	x	1
Affine	$ax+b$	a
Carrée	x^2	$2x$
Polynôme de degré 2	ax^2+bx+c	$2ax+b$
Cube	x^3	$3x^2$
Polynôme de degré 3	ax^3+bx^2+cx+d	$3ax^2+2bx+c$

EXEMPLE

- $f(x)=4x^2-5x+6$.
  On a : $f'(x)=2\times 4x-5=8x-5$.
- $g(x)=x^3-x+6$.
  On a : $g'(x)=3x^2-1$.

c. Fonctions dérivées et opérations

PROPRIÉTÉ

Soients u et v deux fonctions dérivables de fonctions dérivées u' et v', et soit k un réel.

Forme de la fonction f	**Fonction dérivée f'**
$k\times u$	$k\times u'$
$u+v$	$u'+v'$

REMARQUE

Cette **PROPRIÉTÉ** justifie les formules de dérivation des fonctions polynômes de degré 2 ou 3 depuis les dérivées des fonctions affine, carrée et cube.

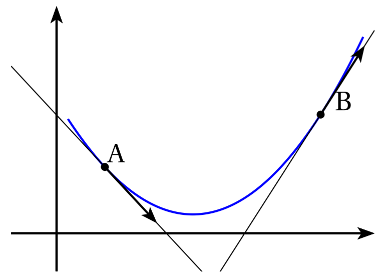
§ 3. Signe de la dérivée et sens de variations

a. Dérivée d'une fonction monotone

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathbb{E}$.

- Si f est croissante sur $\mathbb{E}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a : $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur $\mathbb{E}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.



b. Signe de la dérivée et sens de variations

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathbb{E}$.

- Si, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a : $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{E}$.
- Si, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a : $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{E}$.

MÉTHODE

Pour étudier le sens de variations d'une fonction dérivable f de fonction dérivée f' :

- On calcule la fonction dérivée f' de la fonction f.
- On étudie le signe de $f'(x)$.
- On utilise le **THÉORÈME** précédent.

EXERCICE

Étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[2\ ;\ 10]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 5$.

SOLUTION

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2\ ;\ 10]$ et, pour tout $x \in [2\ ;\ 10]$, on a :

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x - 4 = x - 4$$

Le tableau de signes de la fonction dérivée f' et le tableau de variations de la fonction f qui en découle sont donnés par :

x	2		4		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	15

Le minimum de la fonction f est -3 atteint en 4.